線形解析 II 第 1 回テスト (2003–2-4) 解説

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解説を作りました。ただし，講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，考え方・基本的やり方のみを述べます。採点でも計算違いは軽微な減点に留めています。

1 V を微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の解全体の作るベクトル空間とする。y_1 を $y_1(0) = 2,\ y_1'(0) = -1$ をみたす V の元，y_2 を $y_2(0) = -1,\ y_2'(0) = 2$ をみたす V の元とする。また V から V への写像 D を関数に対しその導関数を対応させる写像とする。このとき次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。
『2 階の (定係数) 線型微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ を考える。2 個の初期値 $y(0) = b_0, y'(0) = b_1$ を与えたとき，それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一つ存在する。』
(1) y_1, y_2 が 1 次独立であることことを示せ。
(2) y_1, y_2 が V の基底である事を示せ。
(3) D が V への写像である事を示せ。
(4) D が線型写像である事を示せ。
(5) D の基底 y_1, y_2 に関する表現行列を求めよ。

解説

(1) 1 次独立の概念は線形解析全体を通じて基本的です。これが分からない人は**合格**しません。1 次独立の定義は (2 個のベクトルの組の場合は) $ay_1 + by_2 = 0$ が成立するのは $a = 0, b = 0$ の場合のみですから。この事を示せばよい分けです。この式のイコールは関数としてイコールなので，$x = 0$ を代入すると，a と b の間の関係式が出てきます。この式の両辺を微分した式に $x = 0$ を代入した式からもう 1 つの関係式が出てきて，$a = 0, b = 0$ が分かり 1 次独立が示されます。解答で $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ などと見なして示したつもりになっている人がいましたが，一方は関数，他方は数ベクトルで別物ですので当然不正解です。

(2) 「基底」=「1 次独立」+「生成」なので，y_1, y_2 が V を生成する事を示せばよい。この場合の条件をきちんと書くと「V の任意の関数 y に対しスカラー a_1, a_2 が存在して $y = a_1y_1 + a_2y_2$ が成立する」です。任意に与えられた関数 y に対して条件を満たすように a_1, a_2 を決定してやればいい分けです。

最初に予備的計算として，$y = a_1y_1 + a_2y_2$ が成立しているとき，a_1, a_2 がどの様な値でなければならないかを求めます。それが求まったら，実際それが求めるものである事をいってやればいい分けです。何故予備的計算だけでだめか考えて下さい。(ヒント：必要条件，十分条件)

(3) D が V への写像である事を示すには，V の任意の関数 y に対し $D(y)$ がまた V の元になっている事を示せばいいわけです。$y \in V$ という事は $y'' - 2y' + y = 0$ を意味します。$D(y) = y'$ なので示すべき事は $D(y)'' - 2D(y)' + D(y) = y''' - 2y'' + y' = 0$ です。与えられた式を微分すれば出て来ますね。

(4) D が線型写像である事を示すには任意の $y_1, y_2 \in V$ と任意のスカラー α に対し 1)$D(y_1 + y_2) = D(y_1) + D(y_2)$ 2)$D(\alpha y_1) = \alpha D(y_1)$ を示せばよい事は定義から分かりますね。あとは微分の性質を使えば出て来ます。

(5) 基底 $\mathsf{E} = \{y_1, y_2\}$ に対し V から $\boldsymbol{K}^2$ への線型写像 $\varphi_{\mathsf{E}} : V \to \boldsymbol{K}^2$ が決まりますね，定義の分からない人は復習して下さい。定義から $\varphi_{\mathsf{E}}(y_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_{\mathsf{E}}(y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。$D(y_1) = ay_1 + by_2,\ D(y_2) = cy_1 + dy_2$ となったとします。このとき，求めるべき表現行列を A とすると，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ となるので (**何故か**!理由の分からない人は自分で考えること)，$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ となります。だから上記の a, b, c, d が分かれば表現行列は分かります。

$\varphi_{\mathsf{E}}(y) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ と誤解している人が若干いました。こうなるのは基底が特別な場合だけです。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の 4 次の行列について問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) の行列 A の階数を求めよ。

(2) A の行列式を計算せよ。

解説

(1) 基本変形を行えば分かるはずです。1 つ注意する点は $b - 1$ で割りたいと思ったとき，$b \neq 1$ の場合は割ってかまいませんが，$b = 1$ のときは0で割ることになってダメです。このときは場合分けします。それ点にさえ注意すれば問題はないはずです。答は a, b が 1 に等しいかどうかで場合分けが必要になります。例えば $a = 1, b = 1$ の場合は階数は 1 ですね。

(2) 分かる人は見た瞬間に分かったと思います。2 列目と 3 列目が同じだから行列式は 0 になるはずですね。(理由の分からない人は自分で考えて下さい。)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ (a, b は定数)。また解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +bx_4 & =2 \\ bx_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =2 \end{array}$$

解説

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解法の理論を用いる方法と，そうではなく直接求める方法があります。解法の理論の方は A と $(A\ \boldsymbol{b})$ の階数の計算ができれば分かるのでここでは説明しません。

4 つの式を上から①式，②式，③式，④式と呼ぶ。①式 − ②式をⓐ式，③式 − ②式をⓑ式，④式 − ②式をⓒ式とすると，①–④の連立方程式は②,ⓐ,ⓑ,ⓒの連立方程式と同値です。これが解を持つ条件を調べればよい。例えばⓒ式は $(b-1)x_1 = 1$ なので，$b = 1$ のときは $0 = 1$ となり矛盾。よって解が存在する場合 $b \neq 1$ が分かる。このとき $x_1 = \dfrac{1}{b-1}$。以下同様に議論すれば条件が出て来る。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次から 1 題選択して答えよ。

(1) 2 項数ベクトル 2 個の組に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が多重線型性をもち，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対し $D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = a, D(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = b$($a, b$ はある定数) となるとする。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とおくとき，$D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を p, q, r, s, a, b を用いて表せ。

(2) $m \times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表す。この $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n\}$ の次元 $s = \dim I_A$ が等しい事を示せ。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとする。$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

解説

テスト時間に言ったように (1) には条件 $D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 0$, $D(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$ が必要です。付け加えて下さい。この問題の解説は省略します。講義要綱のどこかにこの事に関して述べてあるので，理解したい人は探して下さい。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ。

解説 (?)

色々な感想がありました。生かせるものは来年以降の講義の参考にさせてもらいます。感想で多かったのは 1) 問題の解答が欲しい，2) 演習をもっと多くして欲しい，でした。

1) に関してはこの解説の冒頭でも述べたように，所謂「正解」を文書にして配るという事は今の所考えていません。しかし「分からないものは聞きに来い」と言っても，全員が来るとは限らない現状なので，来年度からこの文書の様な解説を作ろうかなと考えています。

2) について：私も今年は例年に比べても演習が少なかったと考えています。来年は内容を少し変更して，演習の時間を増やそうと考えています。しかし，そうやっても「演習時間が少ない」という声はまた聞かれるだろうと思います。各自が自宅で演習問題を解いてくれると嬉しいのですが…。