

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって、答案は単に「答」を書くだけでなく、「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから、主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(2桁ないし3桁)でよい。

- 1** V を微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の解全体の作るベクトル空間とする。 y_1 を $y_1(0) = 2, y_1'(0) = -1$ をみたす V の元, y_2 を $y_2(0) = -1, y_2'(0) = 2$ をみたす V の元とする。また V から V への写像 D を関数に対しその導関数を対応させる写像とする。このとき次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。

『2階の(定係数)線型微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ を考える。2個の初期値 $y(0) = b_0, y'(0) = b_1$ を与えたとき、それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一存在する。』

- (1) y_1, y_2 が1次独立であることを示せ。
- (2) y_1, y_2 が V の基底であることを示せ。
- (3) D が V への写像であることを示せ。
- (4) D が線型写像であることを示せ。
- (5) D の基底 y_1, y_2 に関する表現行列を求めよ。

- 2** 次の4次の行列について問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) の行列 A の階数を求めよ。
- (2) A の行列式を計算せよ。

- 3 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ (a, b は定数)。また解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 &= 2 \\bx_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}$$

- 4 次から 1 題選択して答えよ。

- (1) 2 項数ベクトル 2 個の組に対しスカラーを対応させる写像 $D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ が多重線型性を持ち、単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対し $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = a, D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = b$ (a, b はある定数) となるとする。 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とおくとき、 $D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ を p, q, r, s, a, b を用いて表せ。
- (2) $m \times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ と表す。この $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A = \{\mathbf{y} \in \mathbf{K}^m \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{K}^n\}$ の次元 $s = \dim I_A$ が等しい事を示せ。
- (3) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ を \mathbf{K}^n のベクトルとする。 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

- 5 授業についての感想、数学について思う事などがあれば記せ。