線形解析IIテスト(2003–2-19)解説

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解説を作りました。ただし，講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，考え方・基本的やり方のみを述べます。採点でも計算違いは軽微な減点に留めています。

1 次連立微分方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 4x + y + z \\
\frac{dy}{dt} &= x + 4y + z \\
\frac{dz}{dt} &= x + y + 4z
\end{aligned}
$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 微分方程式 $y' = ay$ を変数分離法により解け。結果のみの記述ではなく，解関数の導出過程が分かるように記述すること。

(2) 微分方程式を行列 A を用いて記述せよ。

(3) A の固有値を求めよ。

(4) A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で1次独立なものを求めよ。またそのベクトルの組が1次独立である事を示せ。

(5) 上の固有ベクトルを3つ並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ。

(6) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(7) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。

(8) (7) の微分方程式を解け。

(9) 与えられた微分方程式を解け。

解説

(1) 変数分離法と書いたのヒントのつもりでした。演算子法でもなんでも方法は問いません。dx, dy を独立したものの様に扱って解きましょう。これが嫌ならそうでない方法もあります。$\dfrac{dy}{dx} = ay$ より $\dfrac{dy}{y} = adx$ となる (左辺が y のみに関

する式，右辺が x のみに関する式になるので変数分離形といいます) ので両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a dx$$

となる。よって $\log|y| = ax + C_1$ より，$y = \pm e^{C_1} e^{ax}$ となる。$C = \pm e^{C_1}$ と置けば，$y = Ce^{ax}$ が得られる。

[2003/2/28 **追加**：] 前期の解法は $y \neq 0$ という事を仮定しています。これを仮定しない場合は次の議論を追加する必要があります。$y(x_0) \neq 0$ となる点 x_0 が存在する場合，上の議論を行い，解関数が任意の x で $y(x) \neq 0$ となる事が分かる。$y(x_0) \neq 0$ となる x_0 が存在しないという事は y が定数関数 0 に等しい事を意味する。この場合 $C = 0$ と考えれば，$y = C^{ax}$ という解に含まれている。

(2) これは書くまでもありませんネ。分からない人はかなり**マズイ**状態です。

(3) 固有値は (定義ではありませんが)，固有方程式の解になっています。固有方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = 0$ ですから，行列式が分かっていれば計算できますね。

(4) λ を A の固有値とすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ を満たすベクトルが λ に属する A の固有ベクトルです。(3) で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めて行きます。このとき注意する点は 2 つ。求めたベクトルが $\boldsymbol{0}$ となったら，ほとんどの場合固有値の計算が間違っています。λ が固有方程式の重解の場合は重複度の数だけ 1 **次独立な**ベクトルを見つける必要があります。見つからない場合は対角化はできません。

この問題の場合解は 1 つは単解 (重解でない解)，1 つは重解です。重解に対応する 1 次独立なベクトルを自分で決定して下さい。自分で 1 次独立ではないベクトルを選んでしまっているのに，1 次独立である「証明」(勿論ウソ証明) をつけている人もいましたが，これは減点ですね。

(5) P は固有ベクトルを並べればいいだけ。後は逆行列を求めるだけです。計算間違いが多かった所です。

(6) 計算があっていれば対角行列で，対角成分に固有値が並ぶはずです。この計算は理論的には必要ないものですが，この計算があっていれば，今までの計算が正しい事が確認できます。それで (5) で逆行列を求める問題を出しました。逆行列が間違っているのに，正解を書いていた人は減点ですネ。

(7) $\dfrac{dP^{-1}\boldsymbol{x}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ に注意すれば，$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$ がでてきます。成分で書けば $\dfrac{du}{dt} = \lambda_1 u$ 等となります。ここで λ_1 は A の固有値です。

(8) u に関する微分方程式が $\dfrac{du}{dt} = \lambda_1 u$ なら，$u = C_1 e^{\lambda_1 t}$ となります。v, w も同様に出来ます。

(9) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ の関係があり，すでに u, v, w が分かっているので，x, y, z が分かります。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y \end{aligned}$$

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ。
(2) A を 3 角化する行列 P を求めよ。P が A を 3 角化するとは，P が正則行列で $P^{-1}AP$ の $(2,1)$ 成分が 0 になる事をいう。
(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくとき，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおき，u, v に関する微分方程式を求めよ。
(4) (3) で求めた微分方程式を解き，u, v を求めよ。
(5) 与えられた微分方程式を解け。

解説

(1) テストのときに訂正しましたが $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ です。固有値，固有ベクトルを求める事は出来ますね。この場合固有値は重解ですが，固有ベクトルは 1 次元分しか存在しません。この問題はプリントの例と同じです。

(2) 対角化ができればいいのですが，(1) の結果から対角化は不可能です。(どうしてですか，理由の分からない人はプリント復習を) そこで次善の策として 3 角化をします。3 角化のためには，(1) で求めた固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$ とすると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立になるような任意のベクトル $\boldsymbol{v}_2$ を持ってくればよかったので，自分で決めて，$P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ とおいて計算して下さい。1 次独立に選ばなければ P は逆行列を持ちません。

(3) (3)–(5) は微分方程式の形を除いて $\boxed{1}$ と同じです。微分方程式はちょっと複雑な形になっていますが，関数の置き換えで簡単な微分方程式に直します。