

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって、答案は単に「答」を書くだけでなく、「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから、主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 次連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 4x + y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 4y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y + 4z$$

を考える。ここで、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) 微分方程式 $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ を変数分離法により解け。結果のみの記述ではなく、解関数の導出過程が分かるように記述すること。
- (2) 微分方程式を行列 A を用いて記述せよ。
- (3) A の固有値を求めよ。
- (4) A の固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ で1次独立なものを求めよ。またそのベクトルの組が1次独立である事を示せ。
- (5) 上の固有ベクトルを3つ並べてできる行列を P とするとき、 P^{-1} を求めよ。
- (6) $P^{-1}AP$ を求めよ。

$$(7) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \text{ と置き、} \mathbf{y} \text{ に関する微分方程式を求めよ。}$$

- (8) (7) の微分方程式を解け。
- (9) 与えられた微分方程式を解け。

裏にも問題あり

2 次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y\end{aligned}$$

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ。
- (2) A を 3 角化する行列 P を求めよ。 P が A を 3 角化するとは、 P が正則行列で $P^{-1}AP$ の $(2, 1)$ 成分が 0 になる事をいう。
- (3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくとき、 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}$ とおき、 u, v に関する微分方程式を求めよ。
- (4) (3) で求めた微分方程式を解き、 u, v を求めよ。
- (5) 与えられた微分方程式を解け。