線形解析Iテスト(2003–7–24)解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではない。一般に数学に模範解答というものはない。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得る。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

赤で書いてある部分は解答する時の注意事項です。青で書いてある部分は定義・定理等の説明です。黒の部分が解答例です。緑は一人言。

1 $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間で $\{\mathbf{0}\}$ とも $\boldsymbol{K}^4$ とも異なり，$\langle \boldsymbol{x} \rangle$($\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{K}^4$ のあるベクトル) の形でもない W を自分で1つ指定し次に答えよ。

(1) W が $\{\mathbf{0}\}$ とも $\boldsymbol{K}^4$ とも異なっている事を示せ。
(2) W が $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ の形をしていない事を示せ。
(3) $\boldsymbol{K}^4$ の部分集合 U が部分空間である事の定義を述べよ。
(4) W が部分空間である事を示せ。

解答例： 問題2がその例になっています。ヒントを出したつもりだったのですが…。

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x - y + z + w = 0 \right\}$ とする。勿論 W の選び方で以下の解答は異なる。理解のためには各自これとは異なる W を選んで解答して下さい。

(1) 一般に2つの集合 A と B に対して「$A = B$」を示すためには $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ を示せばよい。「$A \subseteq B$」を示すためには「任意の $a \in A$ に対し $a \in B$」を示せばよい。$A \neq B$ は $A = B$ の否定だから $A \not\subseteq B$ または $B \not\subseteq A$ を示せばよい。「$A \not\subseteq B$」を示すためには「ある元 $a \in A$ で $a \notin B$ となるものが存在する」を示せばよい。 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$ であり (即ち $\boldsymbol{x}_1 \notin \{\mathbf{0}\}$)，$\boldsymbol{x}_1 \in W$ なので，$W \not\subseteq \{\mathbf{0}\}$ が分かる。よって $W \neq \{\mathbf{0}\}$ である。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{y} \notin W$ であるが，勿論 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^4$ なので，$\boldsymbol{K}^4 \not\subseteq W$ が分かる。

よって $W \neq \boldsymbol{K}^4$ となる。

(2) あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対して $W = \langle \boldsymbol{x} \rangle$ が成立すると仮定して矛盾を導く。ここで $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W = \langle \boldsymbol{x} \rangle$ なので $\boldsymbol{x}_1 = a\boldsymbol{x}$ となるスカラー a が存在する。これより $z = 0, w = 0$ が分かる。$\boldsymbol{x}_2 \in W$ なので $\boldsymbol{x}_2 = b\boldsymbol{x}$ となるスカラー b が存在する。これより $x = 0, y = 0$ が分かる。よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，$W = \langle \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{0} \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$ となり矛盾。以上により W は $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ の形をしてない事が分かる。
$\langle \boldsymbol{x} \rangle$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$ が 1 次独立になることはない。この例でなくても W から 1 次独立でない 2 つのベクトルを持ってくれば矛盾が出る。

(3) これは定義を知っていればできますネ。$\boldsymbol{K}^4$ の部分集合 U が次の 3 つの条件を満たすとき U は $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間であると言う。
1) $U \neq \emptyset$, 2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ が成立する，3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in U$ と任意のスカラー $a \in \boldsymbol{K}$ に対し $a\boldsymbol{x} \in U$ が成立する。

(4) 1) $\boldsymbol{0} \in W$ なので $W \neq \emptyset$ である。1), 2), 3) が満たされていれば $\boldsymbol{0} \in W$ となるので，$\boldsymbol{0} \notin W$ であれば 1), 2), 3) のどれかを満たさないことが分かる。2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in W$ に対し $x - y + z + w = 0, x' - y' + z' + w' = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \\ w + w' \end{pmatrix}$ であるが，$(x + x') - (y + y') + (z + z') + (w + w') = x - y + z + w + x' - y' + z' + w' = 0 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in W$ となる。3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W$ と任意のスカラー $a \in \boldsymbol{K}$ に対し $a\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ aw \end{pmatrix}$ であるが，$ax - ay + az + aw = a(x - y + z + w) = a0 = 0$ なので $a\boldsymbol{x} \in W$ となる。解答で特定のベクトルについて 2), 3) を示して，それで証明になっていると勘違いしているものが

ありました。定義から分かるように「任意のベクトル」及び「任意のスカラー」について示さなければいけません。

$\boxed{\mathbf{2}}$ ベクトル空間 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x - y + z + w = 0 \right\}$ の基底候補を自分で1つ選び出し，次を示せ。ただし，基底候補の1番目のベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) それらが，一次独立である事を示せ。
(2) それらが，V を生成する事を示せ。
(3) V の次元は幾らか。理由をつけて答えよ。

解答例： このVに対して基底は3個のベクトルから構成されます。2個と答えても(1)は成立するので証明できますが，(2)を証明する事はできません。それを「証明」している答案が幾つかありましたが，これは減点です。3個ベクトルは選んでいるのですが，1次独立でないものを選んで，1次独立である事を「証明」している答案もありました。これも減点です。減点の理由は分かりますネ。仮にベクトルの選択が正しくなくても，ちゃんと証明しようとすると，その過程で選択の誤りに気がつくはずです。そこを無視して，内容を理解せずに形式的に間違った事を書き連ねているからです。ベクトルの選択を間違っていても，証明をきちんと試み，途中で混迷を深め終っている答案には部分点を与えています。$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ である。以下異なるベクトルをとると解答の計算が変わりますが本質的な部分は変わりません。

(1) 実数 a_1, a_2, a_3 に対して $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このとき

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $a_1 + a_2 = 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ a_1 + a_3 = 0,\ -a_1 = 0$ が成立する。これより $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ となるので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次独立である。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が V を生成する事を示すためには $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = V$ 即ち「任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対しある実数 a_1, a_2, a_3 が存在して $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ となる」事を示

せばよい。「予備的計算」としてこの関係が成立しているとき a_1, a_2, a_3 がどの様な数でなければならないか調べる。$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ とすると $x - y + z + w = 0$ が成立している。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $x = a_1 + a_2$, $y = a_1 + a_2 + a_3$, $z = a_1 + a_3$, $w = -a_1$ となっている。これを解くと $a_1 = -w$, $a_2 = x + w$, $a_3 = y - x$ となる。任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ に対し $x - y + z + w = 0$ が成立している。$a_1 = -w$, $a_2 = x + w$, $a_3 = y - x$ とおくと,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x - w \\ w \end{pmatrix}$$

となるが，$x - y + z + w = 0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x - w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$ となる。

(3) ベクトル空間の次元の定義は基底を構成するベクトルの個数である。そしてそれはベクトル空間に対して決まり基底によらない。基底を構成するベクトルの個数は 3 個なので, V 次元は 3 である。

$\boxed{\textbf{3}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ に対し次の問に答えよ。

(1) A が定める線型写像を f_A とするとき，$\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(2) $\mathrm{Ker}(f_A)$ を求めよ。

解答例： (1) $\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \text{が存在して} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\}$

なので任意のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f_A)$ に対して $X = x + 2y + 3z + 4w$, $Y = 5x + 6y + 7z + 8w$, $Z = 9x + 10y + 11z + 12w$, $W = 13x + 14y + 15z + 16w$ が成立している。これより $W - X = 12(x + y + z + w)$, $Z - X = 8(x + y + z + w)$, $Y = X = 4(x+y+z+w)$ が得られるので，X, Y, Z, W の間には $Z - X = 2(Y - X)$, $W - X = 3(Y - X)$ の関係が成立している。ここまでで何を示したか述べておこう。

$B = \mathrm{Im}(f_A)$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, Z - X = 2(Y - X), W - X = 3(Y - X) \right\}$ とする。B から任意にベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ を持ってきたとき，$\boldsymbol{y} \in C$ を示した。即ち $B \subseteq C$ を示した。

逆に $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ が $Z - X = 2(Y - X)$, $W - X = 3(Y - X)$ を満たしているとき，

$x = \dfrac{Y - 3X}{2}$, $y = \dfrac{5X - Y}{4}$, $z = 0, w = 0$ とおくと，$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ となる。よって $\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, Z - X = 2(Y - X), W - X = 3(Y - X) \right\}$ となる。ここでは C から任意にベクトル $\boldsymbol{y}$ を持って来たとき，$\boldsymbol{y} \in B$ を示している。即ち $C \subseteq B$ を示している。前とあわせて $B = C$ が従う。

$z = 0, w = 0$ を唐突と感じるかもしれない。今の場合 B の自由度は 2 と予想され，

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の自由度は 4 であるから，2 つは自分で自由に選べる可能性が高い。よって計算が簡単になるように $z = 0, w = 0$ として，「予備的計算」で $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて $x = \dfrac{Y - 3X}{2}$, $y = \dfrac{5X - Y}{4}$ を予め求めておいた。

B を上述の形で表してもよいが，$Z - X = 2(Y - X), W - X = 3(Y - X)$ が成立しているので，$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X + 2Y \\ -2X + 3Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ -X \\ -2X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 2Y \\ 3Y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ となるので，$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ と表してもよい。

(2) $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ なので，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ に対して $x + 2y + 3z + 4w = 0,\ 5x + 6y + 7z + 8w = 0,\ 9x + 10y + 11z + 12w = 0,\ 13x + 14y + 15z + 16w = 0$ が成立している。これより $x + y + z + w = 0,\ y + 2z + 3w = 0$ を得る。ここまでで示していることは，$B = \mathrm{Ker}(f_A)$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x + y + z + w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\}$ とおくとき $B \subseteq C$ である。

逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が $x + y + z + w = 0,\ y + 2z + 3w = 0$ を満たしているとき $x + 2y + 3z + 4w = 0,\ 5x + 6y + 7z + 8w = 0,\ 9x + 10y + 11z + 12w = 0,\ 13x + 14y + 15z + 16w = 0$

が従う。よって $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x+y+z+w=0, y+2z+3w=0 \right\}$ となる。ここで示していることは $C \subseteq B$ である。前とあわせて $B = C$ が得られる。

(1) と同様に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ は $x+y+z+w=0$,$y+2z+3w=0$ を満たしている

ので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

なので $\mathrm{Ker}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と表してもよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求め，逆行列を求めよ。

解答例： A が正則であると仮定すると，行列 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が存在して $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$(単位行列) となる。$AB$ の $(3,3)$ 成分は ca_{33} なので $ca_{33} = 1$ が成立する。このとき $c \neq 0$ でなくてはならない。逆に $c \neq 0$ のとき $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ とおくと $AB = BA = E$(単位行列) となるので A は正則である。いきなり $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ がでてきているが，実際には $AB = E$ から予備的計算により求めている。

以上により正則である必要十分条件は$c \neq 0$であり，このとき逆行列は$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\dfrac{b}{c} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix}$となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ ベクトル空間Vからベクトル空間Wへの写像fが線型写像である事の定義を述べよ。またfが線型写像のとき$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$となる事を示せ。

解答例： ベクトル空間VからWへの写像fが次の2つの条件を満たすとき線型写像という：1) 任意のベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$に対し$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$が成立する。2) 任意のベクトル$\boldsymbol{x} \in V$と任意のスカラー$a$に対し$f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x})$が成立する。

fが線型写像のとき$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$が成立する。両辺から$f(\mathbf{0})$を引くと$\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$が得られる。