線形解析 II 第 1 回テスト (2004–1–29) 解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではありません。一般に数学に模範解答というものはありません。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得る。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

小さめのゴシック文字で書いてある部分は解答する時の注意事項，一人言等です。

解答例が間違いを含む場合もあります。発見した人は教えて下さい。

1 次の 4 次の行列について問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数を求めよ。
(2) A の行列式を計算せよ。

解答例：
(1) **基本変形を実行していけば分かります。途中場合分けが必要になります。** 行基本変形とは 1) ある行の何倍かを別の行に加える，2) ある行を何倍かする (ただし 0 倍は除く)，3) ある行とべつの行を入れ替えるの 3 つの変形をいう。列基本変形とは列に関するこの 3 つの変形をいう，即ち 1) ある列の何倍かを別の列に加える，2) ある列を何倍かする (ただし 0 倍は除く)，3) ある列とべつの列を入れ替えるの 3 つの変形をいう。行基本変形と列基本変形をあわせて基本変形という。1 行目の -1 倍を 2 行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。次に 1 行目の -1 倍を 3 行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。更に 1 行目の -1 倍を 4 行目に加えて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ c-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

を得る。$c-1$ で割り算をしたいので $c=1$ かどうかで場合分けをする。

(1) $c \neq 1$ **のとき**：行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ c-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となっている。$c-1 \neq 0$ なので 4 行目に $\dfrac{1}{c-1}$ をかけると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる。4 行目を 3 行目を入れ替え，3 行目と 2 行目を入れ替え，2 行目と 1 行目を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ が得られる。1 行目の -1 倍を 2 行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ が得られる。ここで $a-1$ で割り算をしたいので $a=1$ かどうかで場合分けをする。

(1 − 1) $c \neq 1$ **かつ** $a \neq 1$ **の場合**： $a-1 \neq 0$ なので 3 行目に $\dfrac{1}{a-1}$ をかけると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ が得られる。3 行目の $1-b$ 倍を 4 行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得られ，2 列目と 3 列目を交換すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる。行列をこの様な形に変形したとき，対角成分に並ぶ 1 の個数が行列 A の階数なので，この場合 A の階数は 3 である。

(1 − 2) $c \neq 1$ **かつ** $a = 1$ **の場合**：このとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ の形をしている。3 行目と 4 行目を交換すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる。$b-1$ で割り算をし

たいので場合分けをする。

$(1-2-1)$ $c \neq 1$ **かつ** $a=1$ **かつ** $b \neq 1$ **の場合**：$b \neq 1$ なので3行目に $\dfrac{1}{b-1}$ をかけて $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。3列目と4列目を交換すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。このときの A の階数は3である。

$(1-2-2)$ $c \neq 1$ **かつ** $a=1$ **かつ** $b=1$ **の場合**：このとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という形をしているので階数は2である。

(2) $c=1$ **のとき**： このとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。$a-1$ で割り算をしたいので $a=1$ かどうかで場合わけをする。

$(2-1)$ $c=1$ **かつ** $a \neq 1$ **のとき**：2行目に $\dfrac{1}{a-1}$ をかけると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。2行目の $1-b$ 倍を3行目に加えると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。よってこのとき A の階数は2である。

$(2-2)$ $c=1$ **かつ** $a=1$ **のとき**：このとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。2行目と3行目を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。

$(2-2-1)$ $c=1$ **かつ** $a=1$ **かつ** $b \neq 1$ **の場合**： 2行目に $\dfrac{1}{b-1}$ をかけると

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。2 列目と 4 列目を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るので，この場合の階数は 2 である。

(2 − 2 − 2) $c = 1$ **かつ** $a = 1$ **かつ** $b = 1$ **の場合**： このとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形をしているので，階数は 1 である。

以上の結果をまとめると $c = 1$ かつ $a = 1$ かつ $b = 1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 1$，$c = 1$ かつ「$a \neq 1$ または $b \neq 1$」のときは $\mathrm{rank}(A) = 2$，$c \neq 1$ かつ $a = 1$ かつ $b = 1$ のときは $\mathrm{rank}(A) = 2$，$c \neq 1$ かつ「$a \neq 1$ または $b \neq 1$」のときは $\mathrm{rank}(A) = 3$ となる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ (a, b, c は定数)。また解が存在するとき解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +bx_4 & = 1 \\ cx_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \end{array}$$

解答例： **連立 1 次方程式の解法の理論を使うか，使わないで直接求める方法の 2 通りが考えられます。両方紹介しておきましょう。**

(I) **直接求める方法**： $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ はこの連立方程式の解になっている。即ち a, b, c の値によらずこの方程式は解を持つ。次に解空間の次元を調べる。

加減法により与えられた連立方程式は次の連立方程式と同値である。

$$\begin{array}{cl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ (a-1)x_4 & = 0 \\ (b-1)x_4 & = 0 \\ (c-1)x_1 & = 0 \end{array}$$

(1) $c = 1$ かつ $a = 1$ かつ $b = 1$ のとき連立方程式は $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ のみとなる。$x_1 = s, x_2 = t, x_3 = u$ とおくと，$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 1 - s - t - u$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ 1-s-t-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。よって解空間の次元は 3 である。
(2) $c=1$ かつ「$a\neq 1$ または $b\neq 1$」のとき連立方程式は $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ と $x_4=0$ となる。$x_1=s, x_2=t$ とおくと，$x_3=1-x_1-x_2-x_4=1-s-t$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって解空間の次元は 2 である。
(3) $c\neq 1$ かつ $a=1$ かつ $b=1$ のとき連立方程式は $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ と $x_1=0$ となる。$x_2=s, x_3=t$ とおくと，$x_4=1-x_1-x_2-x_4=1-s-t$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。よって解空間の次元は 2 である。
(4) $c\neq 1$ かつ「$a\neq 1$ または $b\neq 1$」のとき連立方程式は $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, $x_1=0, x_4=0$ となる。$x_2=s$ とおくと，$x_3=1-x_1-x_2-x_4=1-s$ なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって解空間の次元は 1 である。
(II) **解法の理論を用いる**：
$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=(A\,\boldsymbol{b})$ とおく。連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つ必要十分条件は $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,B$ であり，このとき解空間の次元は $4-\mathrm{rank}\,A$ である。(**今の場合** 4 **は行列** A **の列の数**)
$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中の 1 次独立なベクトルの最大個数が行列 A の階数 $\mathrm{rank}\,A$ である。$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3$ よりこれは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中の 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい。また $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}$ の中の

1次独立なベクトルの最大個数が行列 B の階数 $\mathrm{rank}\, B$ である。$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$ よりこれは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中の1次独立なベクトルの最大個数に等しい。以上により $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$ が分かる。よって与えられた連立方程式は常に解を持つ。次に解空間の次元を調べる。これには $4 - \mathrm{rank}\, A$ を計算すればよい。$\mathrm{rank}\, A$ はすでに $\boxed{1}$ で調べてある。$\boxed{1}$ の結果より次を得る。

(1) $c = 1$ かつ $a = 1$ かつ $b = 1$ のとき3次元，(2) $c = 1$ かつ「$a \neq 1$ または $b \neq 1$」のとき2次元，(3) $c \neq 1$ かつ $a = 1$ かつ $b = 1$ のとき2次元，(4) $c \neq 1$ かつ「$a \neq 1$ または $b \neq 1$」のとき1次元となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3次行列 $A = \begin{pmatrix} 3-a & 1+a & a-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -a & a & 2+a \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ。

(1) A の固有多項式を求めよ。(**解答の参考**：固有多項式は a に関係しないものになる)

(2) A の固有値を求めよ。

(3) (2) で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし固有空間の次元が2以上のときは，その次元の個数の1次独立な固有ベクトルを求めよ。

(4) A が対角化可能である条件を求めよ。

(5) A が (4) の条件を満たしているとき対角化せよ。

解答例：

(1) A の固有方程式は $\Phi(t\,;\,A) = \det(tE - A)$ なのでこれを計算すると $(t-2)^2(t-4)$ となる。

(2) A の固有値は A の固有方程式の解なので，固有方程式の解を求める。固有方程式の解は $t = 2, 4$ である。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合も $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合もこの解は $\boldsymbol{K}$ に属しているので，これらは A の固有値になる。

(3) $t = 4$ に対応する固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を4に属する固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ を満たしている。このとき

$$\begin{array}{llll} (-1-a)x_1 & +(1+a)x_2 & +(a-1)x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ -ax_1 & +ax_2 & +(a-2)x_3 & = 0 \end{array}$$

が成立する。この連立方程式を解いて $x_1 = x_2 + x_3, x_3 = 0$ を得る。$x_2 = 1$ と定めると固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。

次に $t=2$ に対応する固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を 2 に属する固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ を満たしている。このとき

$$\begin{array}{llll} (1-a)x_1 & +(1+a)x_2 & +(a-1)x_3 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \\ -ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & =0 \end{array}$$

が成立する。3 式から分かるように $a=0$ かどうかで場合分けをする。

(a) $a \neq 0$ **のとき** 3 式を a で割ると $x_1=x_2+x_3$ を得る。2 式と比較して $x_2=0$ を得る。よってこの場合連立方程式は $x_1=x_3, x_2=0$ と同値になる。$x_1=1$ と定めて，固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。この場合 $t=2$ は重解であるが，2 に対応する固有空間は 1 次元である。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は異なる固有値に属しているので，1 次独立である。

(b) $a=0$ **のとき** このとき連立方程式は

$$x_1 \quad +x_2 \quad -x_3 \quad =0$$

となる。このとき固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を採用する。$a_2\boldsymbol{v}_2+a_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ とすると，$a_2=0, a_3=0, a_2+a_3=0$ が得られ,1 次独立である事が分かる。

(4) (3) の結果より $a \neq 0$ のときは 2 に対応する固有空間の次元が 1 なので対角化不可能である。$a=0$ のとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立な固有ベクトルになるので，対角化可能である。

(5) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり対角化される。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次から 1 題選択して答えよ。

(1) 2 項数ベクトル 2 個の組に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が多重線型性をもち，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対し $D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=a_{ij}(i,j=1,2,\ a_{ij}$ はある定数) となるとする。$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とおくとき，$D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を p, q, r, s, a_{ij} を用いて表せ。

(2) $m\times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A=(\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n)$ と表す。この $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A=\{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^m \mid \boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n\}$ の次元 $s=\dim I_A$ が等しい事を示せ。

(3) $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとする。$\boldsymbol{v}_1\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)\neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

解答例：

(1) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=p\boldsymbol{e}_1+q\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=r\boldsymbol{e}_1+s\boldsymbol{e}_2$ となるので第 1 成分に関する多重線型性を用いて $D(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=D(p\boldsymbol{e}_1+q\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_2)=D(p\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{v}_2)+D(q\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_2)=pD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{v}_2)+qD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_2)$ を得る。第 2 成分に関する多重線型性を用いて $D(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{v}_2)=D(\boldsymbol{e}_i,r\boldsymbol{e}_1+s\boldsymbol{e}_2)=D(\boldsymbol{e}_i,r\boldsymbol{e}_1)+D(\boldsymbol{e}_i,s\boldsymbol{e}_2)=rD(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_1)+sD(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_2)=ra_{i1}+sa_{i2}$ を得る。以上から $D(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=pD(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{v}_2)+qD(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_2)=p(ra_{11}+sa_{12})+q(ra_{21}+sa_{22})=pra_{11}+psa_{12}+qra_{21}+qsa_{22}$ をる。

(2) 必要なら順序を入れ替える事により，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立と仮定しても一般性を失わない。$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{e}_r\in\boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{a}_i=A\boldsymbol{e}_i$ なので，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r\in I_A$ となる。$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立なので $r\leqq\dim(I_A)=s$ が成立する。$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が I_A の基底である事が示されれば，$r=s$ が示される。

$j>r$ となる j に対し $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_j$ は 1 次独立ではないので，0 でない元を含むスカラー $b_1,\ldots,b_r,b$ が存在して，$b_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{a}_r+b\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{0}$ が成立する。$b=0$ のときは $b_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ の 1 次独立性に矛盾する。よって $b\neq 0$ なので $\boldsymbol{a}_j=-\frac{b_1}{b}\boldsymbol{a}_1+\cdots+-\frac{b_r}{b}\boldsymbol{a}_r$ と表す事ができる。スカラーを取り直して $\boldsymbol{a}_j=b_{j1}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{jr}\boldsymbol{a}_r$ と表しておく。

$\boldsymbol{y}$ を I_A の任意のベクトルとする。このときベクトル $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n$ が存在して $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ となる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ と表される。このとき $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=A(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)=Ax_1\boldsymbol{e}_1+Ax_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+Ax_n\boldsymbol{e}_n=x_1A\boldsymbol{e}_1+x_2A\boldsymbol{x}_2+\cdots+x_nA\boldsymbol{e}_n=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{a}_r+x_{r+1}(b_{r+11}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{r+1r}\boldsymbol{a}_r)+\cdots+x_n(b_{n1}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{nr}\boldsymbol{a}_r)=(x_1+x_{r+1}b_{r+11}+\cdots+x_nb_{n1})\boldsymbol{a}_1+\cdots+(x_r+x_{r+1}b_{r+1r}+\cdots+x_nb_{nr})\boldsymbol{a}_r$ となり，$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が I_A の基底である事が示され証明が終わる。

(3) $A=(\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおく。最初に $\det(A)\neq 0$ を仮定する。A は逆行列 A^{-1} を持つ。

$(\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n) = E = A^{-1}A = A^{-1}(\boldsymbol{v}_1 \ldots \boldsymbol{v}_n) = (A^{-1}\boldsymbol{v}_1 \ldots A^{-1}\boldsymbol{v}_n)$ より $A^{-1}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{e}_i$ が成立している。スカラー $a_1, \ldots, a_n$ が $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ を満たすとき両辺に A^{-1} をかけると $\mathbf{0} = A^{-1}\mathbf{0} = A^{-1}(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n) = A^{-1}a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + A^{-1}a_n\boldsymbol{v}_n = a_1A^{-1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_nA^{-1}\boldsymbol{v}_n = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ を得る。よって $a_1 = \cdot = a_n = 0$ を得，1 次独立性が示される。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底になっている。$\boldsymbol{e}_1$ に対しスカラー $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$ が存在して $\boldsymbol{e}_1 = b_{11}\boldsymbol{v}_1 + b_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{v}_n$ と書ける。以下同様に各 $i = 2, \ldots, n$ に対しスカラー $b_{1i}, \ldots, b_{ni}$ が存在して $\boldsymbol{e}_i = b_{1i}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_{ni}\boldsymbol{v}_n$ と書ける。$B = (b_{ij})$ とおくと，$BA = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)B = (\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n) = E$ となり，B は A の逆行列になる。A は正則行列なので $\det(A) \neq 0$ となる。