線形解析 II 第 1 回テスト

2004–1–29　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の 4 次の行列について問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数を求めよ。
(2) A の行列式を計算せよ。

2 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ (a, b, c は定数)。また解が存在するとき解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +bx_4 & =1 \\ cx_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \end{array}$$

裏にも問題有

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3次行列 $A = \begin{pmatrix} 3-a & 1+a & a-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -a & a & 2+a \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ。

(1) A の固有多項式を求めよ。(**解答の参考**：固有多項式は a に関係しないものになる)

(2) A の固有値を求めよ。

(3) (2) で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし固有空間の次元が 2 以上のときは，その次元の個数の 1 次独立な固有ベクトルを求めよ。

(4) A が対角化可能である条件を求めよ。

(5) A が (4) の条件を満たしているとき対角化せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次から 1 題選択して答えよ。

(1) 2 項数ベクトル 2 個の組に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が多重線型性をもち，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対し $D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}(i, j = 1, 2,\ a_{ij}$ はある定数) となるとする。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とおくとき，$D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を p, q, r, s, a_{ij} を用いて表せ。

(2) $m \times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表す。この $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}m |\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}n\}$ の次元 $s = \dim I_A$ が等しい事を示せ。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}n$ のベクトルとする。$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ。