線形解析 II 第 2 回テスト (2004–2–19) 解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではありません。一般に数学に模範解答というものはありません。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得ます。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

小さめのゴシック文字で書いてある部分は解答する時の注意事項または一人言等です。

注意はしていますが，解答例が間違いを含む場合もあります。発見した人は教えて下さい。

1 次の微分方程式を解く事を考える。

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

ただし独立変数は x とする。

(1) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

(2) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ の一般解を，実数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

ただし次の定理は使用してよい。

定理 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ (a, b は定数) に対し初期値 a_0, a_1 を任意に与えたとき，$y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす微分方程式の解が唯 1 つ存在する。

解答例：**演算子法を用いる，特性方程式から解の形を導出する等幾つか方法があります。演算子法で解を求めた場合，解が一般解である事は方法から従うので断わらなくてもよいが，そうでない場合一般解である事のチェックは必要である。**

(1) **最初は演算子法で。** D を微分演算子とすると，与えられた微分方程式は $(D^2 - 2D + 2)y = 0$ と表される。$\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ とおくと，$D^2 - 2D + 2 = (D - \alpha)(D - \beta)$ が成立する。$D - \alpha = e^{\alpha x} D e^{-\alpha x}$ が成立するので，$u = (D - \beta)y$ とおくと微分方程式は $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となる。$v = e^{-\alpha x} u$ とおくと，$e^{\alpha x} D v = 0$ となり，$Dv = 0$ を得る。これを積分して $v = C_1$ を得る。よって $u = C_1 e^{\alpha x}$ なので代入すると，$C_1 e^{\alpha x} = (D - \beta)y$

となる。$C_1e^{\alpha x}=e^{\beta x}De^{-\beta x}y$ と変形できるので，$De^{-\beta x}y=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$ を積分すると，$e^{-\beta x}y=\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2$ を得る。よって $y=\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$ となる。定数 $\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ を改めて C_1 とおき直して $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$ としてもよい。

特性方程式を使う方法も紹介する。このときは一般解である事を示す必要がある。

微分演算子 $L=D^2-2D+2$ より方程式 $t^2-2t+2=0$ の解を $\alpha=1+i,\beta=1-i$ とする。$y_1=e^{\alpha x}$ と $y_2=e^{\beta x}$ は微分方程式の解である。L は線型なので $C_1y_1+C_2y_2$ も $Ly=0$ の解になっている。これが一般解である事を示す。y を $Ly=0$ の任意の解とする。$y(0)=a_0,y'(0)=a_1$ とおく。$C_1=\dfrac{a_0\beta-a_1}{\beta-\alpha}$, $C_2=\dfrac{a_0\alpha-a_1}{\alpha-\beta}$ とおき (**突然唐突に C_1,C_2 が出て来たが，これは勿論予備的計算をして出て来たものである**), $z=C_1y_1+C_2y_2$ とおく。z は微分方程式の解である。$z(0)=C_1+C_2=a_0$ であり，$z'(0)=C_1\alpha+C_2\beta=a_1$ である。解の 1 意性定理 (問題に述べてある定理) より，同じ初期値をもつ微分方程式の解は 1 意なので，$y=z$ となる。よって任意の解 y は $y=C_1y_1+C_2y_2$ と書ける。よって $C_1y_1+C_2y_2$ が一般解である事が示された。**一般解である事をチェックするのではなく，解である事のみをチェックして,「一般解であることが示された」としている解答が見受けられました。一般解 =「任意の解がその形に書ける」ですので間違えないようにして下さい。**

(2) **特殊解予想で解く。** L を線型演算子とすると，微分方程式 $Ly=f(x)$ の一般解は $Ly=0$ の一般解と $Ly=f(x)$ の特殊解の和の形に書く事ができる。今 $L=D^2-2D+2$ とおく。$Ly=\sin x$ の特殊解が $y=a\sin x+b\cos x$ という形をしていると仮定する。このとき $Ly=y''-2y'+2y=(a+2b)\sin x+(b-2a)\cos x$ となるので，$a+2b=1,b-2a=0$ となればよい。これを解いて $a=\dfrac{1}{5},b=\dfrac{2}{5}$ を得る。逆に $y=\dfrac{1}{5}\sin x+\dfrac{2}{5}\cos x$ は微分方程式 $Ly=\sin x$ を満たすので特殊解である事が分かる。

よって求める一般解は $y=C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{(1-i)x}+\dfrac{1}{5}\sin x+\dfrac{2}{5}\cos x$ である。

(3) 微分方程式 $Ly=f(x)$ の一般解が $Ly=0$ の一般解と $Ly=f(x)$ の特殊解の和の形に書く事ができる事は (2) と同様である。ここでは関数は実数値関数でなければならない。(2) で求めた特殊解は実数値関数なのでこれを採用すればよい。よって $Ly=0$ の一般解として実数値関数を見つければよい。$e^{(1+i)x},e^{(1-i)x}$ は微分方程式の解なのでこれらの和，定数倍の組合せはまた微分方程式の解である。オイラーの公式 $(e^{ix}=\cos x+i\sin x)$ より $\dfrac{1}{2}e^{(1+i)x}+\dfrac{1}{2}e^{(1-i)x}=e^x\cos x$ は微分方程式の解である。同様に $\dfrac{1}{2i}e^{(1+i)x}-\dfrac{1}{2i}e^{(1-i)x}=e^x\sin x$ も微分方程式の解である。$C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$ は実数値関数であるが，これが $Ly=0$ の一般解になっている事を示す。y を微分方程式 $Ly=0$ の任意の解 (ただし実数値関数) とする。$y(0)=a_0,y'(0)=a_1$ とおく。$C_1=a_0,C_2=a_1-a_0$ とおき，(**突然唐突に C_1,C_2 が出て来たが，これは勿論予備**

的計算をして出て来たものである)，$z = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$ とおく。z は微分方程式 $Ly = 0$ の解であり，$z(0) = C_1 = a_0$, $z'(0) = C_1 + C_2 = a_1$ となる。解の 1 意性定理 (問題に述べてある定理) より，同じ初期値をもつ微分方程式の解は 1 意なので，$y = z$ である。よって任意の解 y は $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$ と書ける。よって $C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$ が $Ly = 0$ の一般解である事が示された。以上により

$y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x + \dfrac{1}{5}\sin x + \dfrac{2}{5}\cos x$ が $Ly = \sin x$ の実数値関数としての一般解である事が分かる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の A, B から 1 題選択して答えよ。

$\boxed{\mathrm{A}}$ 連立微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0x - y - z\\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + z\\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 2z\end{aligned}$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で 1 次独立なものを求めよ。またそのベクトルの組が 1 次独立である事を示せ。

(3) 上の固有ベクトルを 3 つ並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(5) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。

(6) (5) の微分方程式を解け。

(7) 与えられた微分方程式を解け。

解答例： **この問題では「1 題選択」といっているので 2 題解くと 0 点になる事もあります。(原理的には 0 点です。) 今回は大目に見ていますが注意して下さい。**

(1) A の固有値は A の固有方程式の解である。A の固有方程式は $\Phi(t; A) = \det(tE - A) = (t-2)^2(t-1) = 0$ よって固有値は $t = 2, 1$ である。

(2) 固有値 2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ を満たして

いる。成分で書くと

$$
\begin{aligned}
0x - y - z &= 2x \\
x + 2y + z &= 2y \\
x + y + 2z &= 2z
\end{aligned}
$$

この連立方程式を解いて (**この過程は省略，第 1 回テストの範囲**) $x + y = 0, x + z = 0$ を得る。$x = -1$ を選択して，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。

固有値 1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たしている。成分で書くと

$$
\begin{aligned}
0x - y - z &= x \\
x + 2y + z &= y \\
x + y + 2z &= z
\end{aligned}
$$

この連立方程式を解いて $x + y + z = 0$ を得る。この場合 $t = 1$ は重解なので 1 次独立になるように $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立かどうかチェックする。$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
-a_1 - a_2 - a_3 &= 0 \\
a_1 + a_2 + 0a_3 &= 0 \\
a_1 + 0a_2 + a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

なので 1 式 +2 式より $a_3 = 0$ を得，これを 2 式，3 式に代入して $a_1 = 0, a_2 = 0$ を得る。よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。**言うまでもない事ですが，ベクトルの選び方は 1 通りではないので，ここで私が選んだベクトル (正確には私が選んだのではなく数式処理ソフト メイプルが選んだ) を選ぶ必要はありません。ベクトルがちがうものであれば以下の解答も変わって来ます。**

(3) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し $(P\,E)$ を基本変形で $(E\,Q)$ の形に変形していく

と (**この過程は省略，第 1 回テストの範囲**)，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。よって
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(4) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(5) $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ で，P の成分は定数なので $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ が成立する。連立微分方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ なので $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$ を得る。成分で書くと $\dfrac{du}{dt} = 2u, \dfrac{dv}{dt} = v, \dfrac{dw}{dt} = w$ となる。

(6) $Du = 2u$ は $(D-2)u = 0$ なので $e^{2t}De^{-2t}u = 0$ より $De^{-2t}u = 0$ を得る。これを積分して $e^{-2t}u = C_1$ を得る。よって $u = C_1e^{2t}$ となる。v, w に関しても同様に解くと，$v = C_2e^t, w = C_3e^t$ を得る。

(7) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ なので

$$
\begin{aligned}
x &= -u - v - w \\
y &= u + v \\
z &= u + w
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
x &= -C_1e^{2t} - C_2e^t - C_3e^t \\
y &= C_1e^{2t} + C_2e^t \\
z &= C_1e^{2t} + C_3e^t
\end{aligned}
$$

となる。

$\boxed{\mathrm{B}}$ 次の連立微分方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 5x - y \\
\frac{dy}{dt} &= x + 3y
\end{aligned}
$$

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ。

(2) A を3角化する行列 P を求めよ。P が A を3角化するとは，P が正則行列で $P^{-1}AP$ の $(2,1)$ 成分が0になる事をいう。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくとき，u, v に関する微分方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた微分方程式を解き，u, v を求めよ。

(5) 与えられた微分方程式を解け。

解答例： (1) A の固有値は A の固有方程式の解である。A の固有方程式は $\Phi(t;A) = \det(tE - A) = (t-4)^2 = 0$ よって固有値は $t = 4$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ が成立する。これを解いて $x - y = 0$ を得る。固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

(2) 3角化するため $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ なので P は3角化を与える行列になっている。P **の選び方は一通りではない。**P **の選び方によって以下の解答は変わる。**

(3) $\boldsymbol{u} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ で，P の成分は定数なので $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ が成立する。連立微分方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ なので $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{u}$ を得る。成分で表すと $\dfrac{du}{dt} = 4u - v, \dfrac{dv}{dt} = 4v$ である。

(4) $\dfrac{dv}{dt} = 4v$ は $(D-4)v = 0$ となるので $e^{4t}De^{-4t}v = 0$ より $De^{-4t}v = 0$ を得る。これを積分して $e^{-4t}v = C_1$ を得る。よって $v = C_1e^{4t}$ となる。これを $\dfrac{du}{dt} = 4u - v$ に代入すると $(D-4)u = -C_1e^{4t}$ を得る。$e^{4t}De^{-4t}u = -C_1e^{4t}$ なので，$De^{-4t}u = -C_1$ を積分して $e^{-4t}u = -C_1t + C_2$ を得る。よって $u = -C_1te^{4t} + C_2e^{4t}$ となる。

(5) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u+v \end{pmatrix}$ なので $x = -C_1e^{4t} + C_2e^{4t}$, $y = u + v = -C_1e^{4t} + (C_1 + C_2)e^{4t}$ となる。