線形解析 II 第 2 回テスト

2004–2–19　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の微分方程式を解く事を考える。

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

ただし独立変数は x とする。

(1) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

(2) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ の一般解を，実数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

ただし次の定理は使用してよい。

定理 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ (a, b は定数) に対し初期値 a_0, a_1 を任意に与えたとき，$y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす微分方程式の解が唯 1 つ存在する。

裏にも問題あり

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の A, B から1題選択して答えよ。

$\boxed{\text{A}}$ 連立微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0x - y - z\\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + z\\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 2z\end{aligned}$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で1次独立なものを求めよ。またそのベクトルの組が1次独立である事を示せ。

(3) 上の固有ベクトルを3つ並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(5) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。

(6) (5) の微分方程式を解け。

(7) 与えられた微分方程式を解け。

$\boxed{\text{B}}$ 次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5x - y\\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y\end{aligned}$$

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ。

(2) A を3角化する行列 P を求めよ。P が A を3角化するとは，P が正則行列で $P^{-1}AP$ の $(2, 1)$ 成分が0になる事をいう。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくとき，u, v に関する微分方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた微分方程式を解き，u, v を求めよ。

(5) 与えられた微分方程式を解け。