線形解析 I 試験

2004–7–29　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次のベクトルが 1 次独立かどうか，理由をつけて答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立であるとは，自明な関係式しか持たないときを言います。即ち $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとき，**必ず** $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ が成立し，そうでない場合は起きません。だから,「$a_1 = 0$ の場合 1 次独立で $a_1 \neq 0$ のとき 1 次独立でない」などという場合分けが発生する事などありえません。この事が理解できない人はもう一度 1 次独立の定義をしっかり確認してください。

(1) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成立しているとする。このとき

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_1 + a_2 - a_3 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。$a_1 = 0$ を 1 式及び 3 式に代入すると，$a_2 + a_3 = 0, a_2 - a_3 = 0$ を得る。これより $a_2 = a_3 = 0$ となる。以上により 1 次独立である事が分かる。

(2) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成立しているとする。このとき

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

が成立している。これらの式は $a_1 + a_2 = 0$ かつ $a_2 + a_3 = 0$ と同値である。$a_1 = -1, a_2 = a_3 = 1$ はこれらの式の共通解になっている。自明でない解が存在するので 1 次独立ではない事が分かる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し線型写像 $T_A : \boldsymbol{K}^4 \longrightarrow \boldsymbol{K}^4$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$, $\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \text{あるベクトル}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4\text{が存在して,}\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \text{ となる} \right\}$ に対し次の問に答えよ。

(1) $\mathrm{Ker}(T_A)$ が部分空間である事を示せ。
(2) $\mathrm{Ker}(T_A)$ を求めよ。
(3) $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底を 1 組自分で選び，それが実際に基底になっている事を示せ。
(4) $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底を 1 組自分で選び，それが実際に基底になっている事を示せ。
(5) 次元の定義を述べ，$\mathrm{Ker}(T_A)$ 及び $\mathrm{Im}(T_A)$ の次元を求めよ。

(1) $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる。$\mathrm{Ker}(T_A)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となっている。$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる。$\mathrm{Ker}(T_A)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α に対し，$A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる。以上により $\mathrm{Ker}(T_A)$ は部分空間である事が分かる。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので $y + z + w = 0, z + w = 0, w = 0$ が成立している。このとき $y = z = w = 0$ となる。逆に $y = z = w = 0$ のとき $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ である。よって $\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; y = z = w = 0 \right\}$ となる。

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底である事を示す。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq \mathrm{Ker}(T_A)$ となる。$\mathrm{Ker}(T_A)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対し $y = z = w = 0$ なので，$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{x}_1$ となり，$\mathrm{Ker}(T_A) \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となる。以上により $\mathrm{Ker}(T_A) = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ てなる。$\boldsymbol{x}_1$ が $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底である事が示された。

(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が基底である事を示す。最初に $\mathrm{Im}(T_A) = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ を示す。$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{e}_2 = T_A(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{x}_2 = A\boldsymbol{e}_3 = T_A(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{x}_3 = A\boldsymbol{e}_4 = T_A(\boldsymbol{e}_4)$ なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathrm{Im}(T_A)$ となる。よって $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq \mathrm{Im}(T_A)$ が分かる。逆に $\boldsymbol{y}$ を $\mathrm{Im}(T_A)$ の任意のベクトルとする。あるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となるので，$\boldsymbol{y} = y\boldsymbol{x}_1 + z\boldsymbol{x}_2 + w\boldsymbol{x}_3$ と書け，$\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が分かる。よって $\mathrm{Im}(T_A) \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ となり，$\mathrm{Im}(T_A) = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ が得られる。$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。このとき，$a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_2 + a_3 = 0, a_3 = 0$ が成立するので，$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ となり $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

(5) ベクトル空間の次元は基底を構成するベクトルの個数として定義される。よって $\mathrm{Ker}(T_A)$ の次元は 1，$\mathrm{Im}(T_A)$ の次元は 3 である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の部分空間で等しいものはどれか，異なるものはどれか，理由をつけて答えよ。ただし

$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $W_1 = \{\mathbf{0}\}$　(2) $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_0 \rangle$　(3) $W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(4) $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$　(5) $W_5 = \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$　(6) $W_6 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(7) $W_7 = \langle \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_6 \rangle$　(8) $W_8 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$　(9) $W_9 = \boldsymbol{R}^3$

(10)$W_{10} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$　(11)$W_{11} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(12)$W_{12} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0 \right\}$

有効な等号または不等号を 1 つ示せば，3 点または 5 点という基準なので，この部分で 50 点以上の得点が可能であった。実際は部分空間の数の多さに圧倒されたのか，1 つまたは 2 つ手をつけたものが大部分であった。

最初に結論を述べると，

$$W_1 = W_2 = W_{12}, \qquad W_3 = W_5 = W_{11}, \qquad W_4 = W_6 = W_8 = W_{10}, \qquad W_7 = W_9$$

であり。等号の書いていないものどうしは異なる。

以下では $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする。$W_1 = \{\mathbf{0}\} \subseteq W_2 = \langle \mathbf{0} \rangle = \{\mathbf{0}\} = W_1$ なので $W_1 = W_2$ が成立する。$W_1 = \{\mathbf{0}\} \subseteq W_{12}$ が成立しているので，逆を示す。$\boldsymbol{x}$ を W_{12} の任意のベクトルとする。$x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0$ が成立している。これを計算して $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ を得る。よって $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in W_1$ となり，$W_1 = W_{12}$ となる。

$W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle = W_5$ が成立している。$\boldsymbol{x}_4 = -2\boldsymbol{x}_3$ なので，$\boldsymbol{x}_4 \in W_3$ となるので，$W_5 \subseteq W_3$ が成立する。よって $W_3 = W_5$ である。$\boldsymbol{x}_3 \in W_{11}$ となるので，$W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq W_{11}$ となる。逆に $\boldsymbol{x}$ を W_{11} の任意のベクトルとすると，$x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0$ が成立しているので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{x}_3$ となり，$\boldsymbol{x} \in W_3$ となる。よって $W_{11} \subseteq W_3$ となり，$W_3 = W_{11}$ が成立する。

$W_4 \subseteq W_6 \subseteq W_8$ が成立しているので，$W_8 \subseteq W_4$ を示せば，$W_4 = W_6 = W_8$ が分かる。$\boldsymbol{x}_3 = 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4 = 6\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2$ より $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = W_4$ となるので $W_8 \subseteq W_4$ となる。また $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_{10}$ となるので $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq W_{10}$ となる。逆に $\boldsymbol{x}$ を W_{10} の任意のベクトルとすると，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_3)\boldsymbol{x}_1 + x_3\boldsymbol{x}_2$ となるので $W_{10} \subseteq W_4$ となり，$W_4 = W_{10}$ が分かる。

$W_7 \subseteq W_9$ が成立している。逆に任意の $\boldsymbol{x} \in W_9$ に対し，

$$\boldsymbol{x} = \frac{x_2 + x_3}{6}\boldsymbol{x}_4 + \frac{x_3 - 2x_2}{3}\boldsymbol{x}_2 + (x_1 + x_2)\boldsymbol{x}_5$$

となるので，$W_9 \subseteq W_7$ となり，$W_7 = W_9$ が成立する。

$\boldsymbol{x}_3 \neq \mathbf{0}$ であり，$\boldsymbol{x}_3 \in W_3$ なので $W_1 \neq W_3$ となる。同様に $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$ であり，$\boldsymbol{x}_1 \in W_4$ なので $W_1 \neq W_4$ となる。$\boldsymbol{x}_4 \neq \mathbf{0}$ であり，$\boldsymbol{x}_4 \in W_7$ なので $W_1 \neq W_7$ となる。

$W_3 = W_4$ と仮定すると，$\boldsymbol{x}_1 \in W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle$ より $\boldsymbol{x}_1 = a\boldsymbol{x}_3$ となる実数 a が存在する。このとき $1 = a, -1 = -a, 0 = -2a$ が成立しているので，$1 = a = 0$ となり矛盾。よって $W_3 \neq W_4$ である。

$W_3 = W_9$ と仮定すると $\boldsymbol{x}_1 \in W_9$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in W_3$ となる。前と同様に矛盾となるので $W_3 \neq W_9$ である。

$W_4 = W_9$ と仮定すると，$\boldsymbol{x}_5 \in W_4$ となる。実数 a_1, a_2 が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。$a_1 + a_2 = 1, -a_1 - a_2 = 0, a_2 = 0$ より $1 = a_1 = 0$ となり矛盾。よって $W_4 \neq W_9$ である。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対し $c_{ij}=a_{ji}$ としたとき $C=(c_{ij})$ で定義される行列を A の転置行列といい，$C=A^T$ と表す。A,B を n 次行列とするとき，

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が成り立つ事を示せ。

$B=(b_{ij})$ とおく。$B^T=(d_{ij})$ とおくと $d_{ij}=b_{ji}$ が成立している。$AB=\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right)$ なので $(AB)^T=\left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si}\right)$ となる。一方 $B^TA^T=(d_{ij})(c_{ij})=\left(\sum_{s=1}^{n} d_{is}c_{sj}\right)=\left(\sum_{s=1}^{n} b_{si}a_{js}\right)=\left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}b_{si}\right)$ なので $(AB)^T=B^TA^T$ となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。

ここは内容に関係なく書いてあれば括弧内の点数が与えられます。この様な項目を設けているのは，次回以降の講義の参考にするためです。出席していない人には答えようがないので,「数学について思うこと」という項目を加えています。