線形解析 I 試験

2004–7–29　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次のベクトルが 1 次独立かどうか，理由をつけて答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し線型写像 $T_A : \boldsymbol{K}^4 \longrightarrow \boldsymbol{K}^4$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$, $\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, \text{あるベクトル} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \text{が存在して}, \boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) \text{ となる} \right\}$ に対し次の問に答えよ。

(1) $\mathrm{Ker}(T_A)$ が部分空間である事を示せ。

(2) $\mathrm{Ker}(T_A)$ を求めよ。

(3) $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底を 1 組自分で選び，それが実際に基底になっている事を示せ。

(4) $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底を 1 組自分で選び，それが実際に基底になっている事を示せ。

(5) 次元の定義を述べ，$\mathrm{Ker}(T_A)$ 及び $\mathrm{Im}(T_A)$ の次元を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の部分空間で等しいものはどれか，異なるものはどれか，理由をつけて答えよ。ただし

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ とする。

(1) $W_1 = \{\mathbf{0}\}$
(2) $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_0 \rangle$
(3) $W_3 = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(4) $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$
(5) $W_5 = \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$
(6) $W_6 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$
(7) $W_7 = \langle \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_6 \rangle$
(8) $W_8 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$
(9) $W_9 = \boldsymbol{R}^3$

(10) $W_{10} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(11) $W_{11} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(12) $W_{12} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0 \right\}$

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対し $c_{ij} = a_{ji}$ としたとき $C = (c_{ij})$ で定義される行列を A の転置行列といい，$C = A^T$ と表す。A, B を n 次行列とするとき，

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が成り立つ事を示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。