線形解析 I 第 1 回小テスト

2004–5–27　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

裏にも問題あり

1 W が部分空間である事の定義を述べよ。また

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

とおくとき W が部分空間である事を示せ。更に W を $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ の形で表せ。

W が次の 3 つの条件を満たすとき ($\boldsymbol{R}^3$ の) 部分空間であるという。

(1) $W \neq \emptyset$，即ち W は空集合ではない。

(2) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ となる。

(3) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $\alpha \boldsymbol{x} \in W$ となる。

この部分の様に青色で書かれた部分は注意等であり，解答例の部分ではありません。

$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0 - 0 + 0 = 0$ が成立するので $\boldsymbol{0} \in W$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとすると，$x_1 - x_2 + x_3 = 0, y_1 - y_2 + y_3 = 0$ が成立している。このとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ に対し $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0$ が成立するので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトル，α を任意の実数とする，$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ である。$\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha(x_1 - x_2 + x_3) = \alpha 0 = 0$ となるので $\alpha \boldsymbol{x} \in W$ となる。以上により W は部分空間となる。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$ に対して $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ を証明する。$1 - 1 + 0 = 0$ 及び $0 - 1 + 1 = 0$ なので $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ となる。よって $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq W$ となる。逆に任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$ に対し $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ が成立するので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成立するので $\boldsymbol{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。よって $W \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となり，以上により $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる。

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ とする。このとき成分で書き直すと

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + 4a_2 + aa_3 &= 0 \end{aligned}$$

となる。このとき $a_2 = 0$ が成立する。$a_2 = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 + aa_3 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

$a = 1$ のとき $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$ という解を持つので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立ではない。

$a \neq 1$ のとき $(a-1)a_3 = 0$ かつ $a - 1 \neq 0$ より $a_3 = 0$ となる。よって $a_1 = 0$ も従う。以上により解は $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ しかないことが分かり，このときは 1 次独立である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のベクトルの組が部分空間 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 0 \right\}$ の基底である事を示せ。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

最初に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である事を示す。$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ が成立しているとする。成分で書き直すと

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

である。よって $a_1 = 0, a_2 = 0$ となるので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である。

次に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が W を生成する事を示す。$2 - 2 \cdot 1 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{v}_1 \in W$ である。$0 - 2 \cdot 1 + 2 = 0$ なので $\boldsymbol{v}_2 \in W$ である。よって $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subseteq W$ が成立する。逆に $W \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ を示す。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとする。このとき $x - 2y + z = 0$ が成立している。予備的計算として $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ となっていると仮定して，その係数 a_1, a_2 を求める。計算より $a_1 = \dfrac{x}{2}, a_2 = \dfrac{z}{2}$ となる。

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{z}{2}\boldsymbol{v}_2 &= \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x+z}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ となり，$W \subseteq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ が分かり，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ となる。

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は1次独立で W を生成するので W の基底になっている。