線形解析 II 第 1 回試験

2004–12–9　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 行列 $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -5 & -3 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ。

(1) A の行列式を求めよ。
(2) A の固有多項式を求め，A の固有値を求めよ。
(3) (2) で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし固有空間の次元が 2 以上のときは，その次元の個数の 1 次独立な固有ベクトルを求めよ。
(4) A が対角化可能でない場合はその理由を述べよ。A が対角化可能な場合は，対角化する行列 P を求め，P^{-1} を計算し，更に $P^{-1}AP$ を計算せよ。

(1) $\det(A) = 16$

(2) 固有多項式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = (t-2)^2(t+2)^2 = 0$ である。よって A の固有値は $2, -2$ である。

(3) 2 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと，$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ より

$$z = -x,\ 3x - y + 3w = 0$$

が従う。1 次独立なベクトルの組として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

-2 に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと，$A\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$ より

$$x = -z - 2y,\ w = 3y - 3z$$

が従う。1 次独立なベクトルの組として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

(4) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ とおく。$P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 6 & 4 \\ -6 & 1 & -3 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ なので,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか調べよ。途中 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ と場合分けが必要になるかもしれない。

固有方程式は $\Phi_A(t) = (t-1)(t^2+1) = 0$ となる。

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合，固有値になるのは $t = 1$ のみである。この固有値は特性解としては重解ではないので対応する固有ベクトルで 1 次独立なものは 1 つしかない。他に固有ベクトルは存在しない。1 次独立な固有ベクトルが 3 個 (行列のサイズ) 存在する事が行列が対角化できるための必要十分条件であるから，今の場合は対角化不可能である。

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合，固有値は $t = 1, i, -i$ の 3 個存在する。それぞれの固有値に属する固有ベクトルが存在する。それを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とする。異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立なので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。3 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在する事が行列が対角化できるための必要十分条件なので，対角化可能である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ。また解が存在するときそれをパラメータ表示せよ。解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{array}{rrrrrcl} v & +w & +x & +y & +z & = & 3 \\ v & +2w & +x & +2y & +z & = & 4 \\ v & +2w & +2x & +2y & +z & = & 5 \\ 2v & +3w & +3x & +3y & +2z & = & a \\ 2v & +3w & +2x & +3y & +2z & = & 7 \end{array}$$

連立 1 次方程式の係数を抜きだした行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & a \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ を考える。この行列を行基本変形して行って

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。
よってこの方程式は $a=8$ のとき解を持つ。解は

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z \\ 1-y \\ 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。このとき解空間の次元は 2 である。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次から 1 題選択して答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{K}^4$ から $\boldsymbol{K}^4$ への線型写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき $\mathrm{Ker}(T_A)$ 及び $\mathrm{Im}(T_A)$ を求めよ。

(2) $m \times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表す。この $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid \ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,\}$ の次元 $s = \dim I_A$ が等しい事を示せ。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとする。$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

選択問題なので解答は省略します。要綱を見れば対応する部分が見つかります。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。