線形解析 II 第 2 回試験

2005–2-24　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{1}$ 曲線 $y=f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定であるとき次の問に答えよ。

(1) $y=f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(2) 上で求めた微分方程式を解き，一般解を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ が $(1,1)$ 及び $(2,\sqrt{3})$ を通るとき，$f(x)$ を求めよ。

(1) 点 P の座標を (x,y) とする。点 P における曲線 $y=f(x)$ の接線方程式は，変数を X,Y とすると，

$$Y=y'(X-x)+y$$

である。直線が直交するとき，その傾きの積は -1 なので，P における曲線 $y=f(x)$ の法線の方程式は

$$Y=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$$

である。Q の座標は $(x,0)$，N の座標は $(X,0)$ なので $X-x=C$(定数) と置く。N は法線上の点なので $0=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$ を満たす。よって求める微分方程式は

$$yy'=C$$

である。

(2) $y\frac{dy}{dx}=C$ より $ydy=Cdx$ と変形して，両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}y^2=Cx+C_1$$

を得る。よって一般解は

$$y=\pm\sqrt{2Cx+2C_1}$$

である。

(3) $(1,1)$,$(2,\sqrt{3})$ の y 座標は正なので $y=\sqrt{2Cx+2C_1}$ の形をしている。$2=\sqrt{2C+2C_1}$,$\sqrt{3}=\sqrt{4C+2C_1}$ より $C=1,C_1=-\frac{1}{2}$ を得る。よって

$$y=f(x)=\sqrt{2x-1}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の微分方程式を解く事を考える。

$$y'' - 4y' + 5y = e^x$$

ただし独立変数は x とする。
(1) 微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。
(2) 微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ の一般解を，複素数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。
(3) 微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ の一般解を，実数値関数の範囲で求めよ。なおその解が一般解である事のチェックもきちんとすること。

ただし次の定理は使用してよい。
定理 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ (a, b は定数) に対し初期値 a_0, a_1 を任意に与えたとき，$y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす微分方程式の解が唯 1 つ存在する。

(1) 解答例は (1) は演算子法で解く。他の方法で解いても勿論よい。与えられた微分方程式は $(D^2-4D+5)y = 0$ となる。$\lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i$ と置くと，$x^2-4x+5 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ なので，微分方程式は $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$ と書ける。$z = (D-\lambda_2)y$ とおくと $(D-\lambda_1)z = 0$ となる。$D-\lambda_1 = e^{\lambda_1 x}De^{-\lambda_1 x}$ を用いて $D^{\lambda_1 x}De^{-\lambda_1 x}z = 0$ と変形する。$D^{-\lambda_1 x}z = 0$ の両辺を積分して，$e^{-\lambda_1 x}z = C_1$ を得る。よって $x = C_1 e^{\lambda_1 x}$ となる。$z = (D-\lambda_2)y$ なので $(D-\lambda_2)y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ となる。$D-\lambda_2 = e^{\lambda_2 x}De^{-\lambda_2 x}$ を用いて $e^{\lambda_2 x}De^{-\lambda_2 x}y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ と変形する。$De^{-\lambda_2 x}y = C_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$ の両辺を積分すると $e^{-\lambda_2 x}y = \dfrac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} + C_2$ となり，

$$y = \frac{C_1}{\lambda_1-\lambda}e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_2 x}$$

を得る。係数を置き換えて $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_2 x}$ としてもよい。
演算子法で解いたので一般解である事は保証されておりチェックする必要はない。
(2) 解答例は (2) は特殊解予想で解く。他の方法で解いても勿論よい。微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ の一般解 y はこの微分方程式の特殊解を y_0，微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ の一般解を z とするとき $y = z + y_0$ という形で書ける事が知られている。z は (1) で求めたので，ここでは特殊解 y_0 を求める。$y_0 = Ce^x$ という形をしていると予想する。これが微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ を満たしているとすると $y'' - 4y' + 5y = Ce^x - 4Ce^x + 5Ce^x = 2Ce^x = e^x$ となるので，$C = \dfrac{1}{2}$ を得る。逆に $y_0 = \dfrac{1}{2}e^x$ は微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ の解である。よって一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{2}e^x$$

である。
(3) オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ より $e^{\lambda_1 x} = e^{2x+ix} = e^{2x}e^{ix} = e^{2x}(\cos x + i\sin x)$，$e^{\lambda_2 x} = e^{2x-ix} = e^{2x}e^{-ix} = e^{2x}(\cos x - i\sin x)$ が分かる。これより $y_1 = e^{2x}\cos x$ 及び $y_2 = e^{2x}\sin x$ は微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ の解である事が分かる。
よって $y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x + \dfrac{1}{2}e^x$ $(C_1, C_2 \in \boldsymbol{R})$ は微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = e^x$ の解であり，しかも実数値関数である事が分かる。この解が一般解である事を示す。
z を微分方程式の任意の実数値関数である解とする。今 $z = y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x + \dfrac{1}{2}e^x$ と書かれていると仮定すると，$z(0) = C_1 + \dfrac{1}{2}$,$z'(0) = 2C_1 + C_2 + \dfrac{1}{2}$ である事が分かる。逆に z に対し $C_1 = z(0) - \dfrac{1}{2}, C_2 = z'(0) - 2z(0) + \dfrac{1}{2}$ とおくと，$y(0) = C_1 + \dfrac{1}{2} = z(0)$，$y'(0) = 2C_1 + C_2 + \dfrac{1}{2} = z'(0)$ が成立する。z と y は同じ 2 階の微分方程式の解であり，初期値が同じなので定理より $y = z$ が分かる。
よって任意の解は $C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x + \dfrac{1}{2}e^x$ の形に書ける事が分かり，これが一般解である事が分かった。

3 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y - z \qquad \frac{dy}{dt} = -2x + 6y - 2z \qquad \frac{dz}{dt} = -x + 2y + z$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値を求めよ。
(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で 1 次独立なものを求めよ。またそのベクトルの組が 1 次独立である事を示せ。
(3) 上の固有ベクトルを 3 つ並べてできる行列を P とするとき，P^{-1} を求めよ。
(4) $P^{-1}AP$ を求めよ。
(5) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。
(6) (5) の微分方程式を解け。
(7) 与えられた微分方程式を解け。

(1) $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = (t-2)^2(t-4) = 0$ より固有値は $2, 4$ である。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 4 に属する固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ より $z = y - x, y = 2x$ が従う。よって $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 2 に属する固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ より $x - 2y + z = 0$ が従う。よって $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ を計算すると (計算過程省略) $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ が得られるので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である。

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を行基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ を得る。よって

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ である。

(4)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5)

$$\frac{du}{dt} = 4u \qquad \frac{dv}{dt} = 2v \qquad \frac{dw}{dt} = 2w$$

(6) $\frac{du}{dt} = 4u$ より $\frac{du}{u} = 4dt$ と変形して両辺を積分する。$\log|u| = 4t + C_1$ より $u = \pm e^{C_1}e^{4t}$ となるが，$\pm e^{C_1}$ を改めて C_1 とおくと $u = C_1e^{4t}$ が得られる。
v, w についても同様に計算して $v = C_2e^{2t}, w = C_3e^{2t}$ を得る。

(7) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ より

$$x = C_1e^{4t} + 2C_2e^{2t}, \qquad y = 2C_1e^{4t} + C_2e^{2t} + C_3e^{2t}, \qquad z = C_1e^{4t} + 2C_3e^{2t}$$

となる。

学 科		在番 籍号		氏 名	