線形解析 I 第 1 回試験

2005–6–21　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の連立 1 次方程式が解を持つための条件を求めよ。また解を持つとき，その解をパラメータ表示せよ。ただし a は定数とする。

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = a \end{cases}$$

係数拡大行列を $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & a \end{pmatrix}$ とする。この行列に対し行基本変形を実行する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 3\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

よって与えられた連立 1 次方程式は次の連立 1 次方程式と同値である。

$$\begin{cases} x \qquad + -z + -2w = 2 \\ \qquad + y + 2z + 3w = -1 \\ \qquad\qquad 0 = a-1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式が解を持つ必要十分条件は $a = 1$ である。また $a = 1$ のとき解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + z + 2w \\ -1 - 2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示される。

パラメータ表示は一意的に定まるものではないので，いろいろな表現方法がある。ここであげたのはあくまで 1 つの例である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は別のパラメータ表示の例を与える。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に直交する長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{x}$ を 1 つ求めよ。

求めるベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交しているので，内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はゼロである。よって

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x + y + z = 0 \tag{1}$$

を得る。また $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ も直交しているので，内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ もゼロである。よって

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = x - y + z = 0 \tag{2}$$

を得る。またベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さは 1 なので

$$|\boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3}$$

を得る。

式 (1) および式 (2) より $y = 0, z = -x$ を得る。これを式 (3) に代入すると $x^2 = \frac{1}{2}$，よって $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

求めるベクトルは $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

問題では「1 つ」と指定してあるので，どちらか一方でよい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のベクトルが 1 次独立かどうか，理由をつけて答えよ。ここで p, q は定数とする。$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\q\\4\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\p\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\q\\4\end{pmatrix}$$

とおく。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4 = \mathbf{0} \tag{1}$$

が $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0,0,0,0)$ 以外の解を持てば 1 次独立でなく，$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0,0,0,0)$ という解しか持たなければ 1 次独立である。
$p = 3$ のときは $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 1, -1, 0)$ は解を式 (1) の解なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立でない。
$q = 3$ のときは $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 0, 0, -1)$ は解を式 (1) の解なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立でない。
よって $p \neq 3$ かつ $q \neq 3$ の場合を考える。式 (1) は次の連立 1 次方程式と同値である。

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} c_1 & & & & & + & c_4 & = & 0\\ 2c_1 & + & c_2 & + & c_3 & + & 2c_4 & = & 0\\ 3c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & + & qc_4 & = & 0\\ 4c_1 & + & 3c_2 & + & pc_3 & + & 4c_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

係数拡大行列を $\widetilde{A} = \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2&2&q&0\\4&3&p&4&0\end{pmatrix}$ とする。この行列に行基本変形を実行する。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2&2&q&0\\4&3&p&4&0\end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-2\times 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\3&2&2&q&0\\4&3&p&4&0\end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&2&2&q-3&0\\4&3&p&4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&q-3&0\\4&3&p&4&0\end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-4\times 1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&q-3&0\\0&3&p&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行}\to 4\text{ 行}-3\times 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&q-3&0\\0&0&p-3&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to \frac{1}{q-3}\times 3\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&p-3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行}\to \frac{1}{p-3}\times 4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-3\text{ 行},2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-4\text{ 行}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

よって連立 1 次方程式 (2) の解は $(c_1, c_2, c_3, C_4) = (0,0,0,0)$ である。

以上により $p = 3$ または $q = 3$ のとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立でなく，$p \neq 3$ かつ $q \neq 3$ のとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立である。

解説では連立 1 次方程式を基本変形を使って解いたが，こんな大道具を使わずに解いても，勿論よい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えよただし

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の定義を述べよ。

(2) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ が部分空間になることを示せ。

(3) 次の部分空間で等しいものはどれか，異なるものはどれか，理由をつけて答えよ。$W_1 = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$, $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$,

$W_3 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$, $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4 \rangle$, $W_5 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$, $W_6 = \boldsymbol{R}^3$

(1) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = \{ \boldsymbol{x} \mid$ スカラー a_1, a_2が存在して$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \}$ 言葉で述べると，スカラー a_1, a_2 を用いて $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$ と表されるとき $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合という。ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合全体が作る集合を $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ と書く。

(2) $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ とおく。V が部分空間であることを示すためには (1) $V \neq \emptyset$, (2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$, (3) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー a に対し $a\boldsymbol{x} \in V$ を示せばよい。$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合なので $\mathbf{0} \in V$ となる。よって (1) は成立する。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対しスカラー a_1, a_2, b_1, b_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立している。

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{x}_2$$

なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合になっている。よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ となり，(2) は成立している。V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しスカラー a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立している。任意のスカラー a に対し

$$a\boldsymbol{x} = a\,(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) = (aa_1)\boldsymbol{x}_1 + (aa_2)\boldsymbol{x}_2$$

なので $a\boldsymbol{x}$ も $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合になっている。よって $a\boldsymbol{x} \in V$ となり，(3) は成立している。

(3) 結論を先に書く。

$$W_1 \subsetneq W_2 = W_4 = W_5 \subsetneq W_3 = W_6$$

である。

等号成立を先に示す。$[W_2 = W_4 = W_5]$： $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3$ なので $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ および $\boldsymbol{x}_3$ の 1 次結合である。よって $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle = W_4$ となる。$1 - 1 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in W_5$ となる。同様に $1 - 2 + 1 = 0$ および $2 - 5 + 3 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4 \in W_5$ が分かる。よって $W_4 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq W_5$ が分かる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を W_5 の任意のベクトルとすると $x - y + z = 0$ が成立している。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - z) + z \\ (x - z) + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ x - z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = (x - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{x} \in W_2$ となり，$W_5 \subseteq W_2$ が成立する。以上により $W_2 = W_4 = W_5$ が成立する。$[W_3 = W_6]$： $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in W_6$ なので $W_3 \subseteq W_6$ である。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を W_6 の任意のベクトルとする。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x + y + z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x - y + z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in W_3$，よって $W_6 \subseteq W_3$ が成立する。

次に「不等号」を示す。$[W_1 \subsetneq W_2]$： 等号成立を仮定すると $W_2 \subseteq W_1$ が成立している。このとき $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ となるが，これは $\boldsymbol{x}_2 = a\boldsymbol{x}_1$ となるスカラー a が存在することを意味する。これは矛盾，よって仮定は正しくない。$[W_5 \subsetneq W_6]$： $\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ なので $\boldsymbol{x}_5 \not\in W_5$ であるが，$\boldsymbol{x}_5 \in W_6$ である。よって $W_5 \neq W_6$ である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次のベクトル空間の基底を 1 組指定し，それが基底であることを示せ。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x + 2y + 3z + 4w = 0 \right\}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z - 4w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が V の基底であることを示す。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

の解は $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみなので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立である。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in V$ なので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subseteq V$ となっている。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ を V の任意のベクトルとすると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z - 4w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ である。よって $V \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ となる。以上により $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ となり，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V を生成する。
1 次独立であり V を生成するので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は V の基底である。

基底は 1 通りに決まるものではないので選び方は勿論色々ある。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。

学 科		在番 籍号		氏 名	