線形解析 I 第 2 回試験

2005–8–1　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。
　証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。
　採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
　在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。
　ベクトルとベクトルの集合を混同した場合減点する。

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線型写像 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定義する。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $T(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ は直交している。このとき A はどの様な行列か。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ とおくと $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ となる。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交しているので内積は 0 である。よって

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x(x\cos\theta - y\sin\theta) + y(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x^2 + y^2)\cos\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。これが任意の x, y について成立するので $\cos\theta = 0$ である。このとき $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ なので $\sin^2\theta = 1$，即ち $\sin\theta = \pm 1$ となる。よって

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, とし，$W_1 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$, $W_2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$ とするとき次の問に答えよ。ただしこの問題ではベクトル空間はすべて実数 $\boldsymbol{R}$ 上のものを考えている。

(1) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の定義を述べよ。

(2) W_2 が (a) $W_2 \neq \emptyset$，(b) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_2$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_2$，(c) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W_2$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $\alpha \boldsymbol{x} \in W_2$，を満たしているとき W_2 はベクトル空間であるという。W_2 がベクトル空間になることを示せ。

(3) $W_1 \subseteq W_2$ を証明せよ。

(4) $W_2 \subseteq W_1$ を証明せよ。

(1) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = \{ a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 \mid a_1, a_2 \in \boldsymbol{R} \}$ である。

(2) (a) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0 - 0 + 0 = 0$ が成立するので $\mathbf{0} \in W_2$ である。よって $W_2 \neq \emptyset$ である。

(b) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in W_2$ とすると $x - y + z = 0$ および $x' - y' + z' = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ となるが，$(x + x') - (y + y') + (z + z') = (x - y + z) + (x' - y' + z') = 0 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_2$ が成立する。

(c)$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_2$ とすると $x - y + z = 0$ が成立している。$\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し $\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ となる。$\alpha x - \alpha y + \alpha z = \alpha(x - y + z) = \alpha 0 = 0$ となるので $\alpha \boldsymbol{x} \in W_2$ が成立する。

(3) $1 - 1 + 0 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in W_2$ となる。$1 - 2 + 1 = 0$ なので $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ となる。任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W_1$ に対し実数 a_1, a_2 が存在して $\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2$ が成立する。(c) より $a_1 \boldsymbol{x}_1 \in W_2$ かつ $a_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ が成立する。(b) より $a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ となる。よって $\boldsymbol{x} \in W_2$ となり，$W_1 \subseteq W_2$ が示される。

(4) 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_2$ に対し $x - y + z = 0$ が成立している。よって

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y - 2z) + z \\ (y - 2z) + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y - 2z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = (y - 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり $\boldsymbol{x} \in W_1$ が成立する。よって $W_2 \subseteq W_1$ が示された。

3 次のベクトルが 1 次独立かどうか，理由をつけて答えよ。ここで p,q は定数とする。$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく。$p=3$ のとき $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$ とおくと $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ となるので 1 次独立ではない。$q=2$ のとき $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$ とおくと $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ となるので 1 次独立ではない。
よって $p \neq 3$ かつ $q \neq 2$ とする。

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

とすると

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ 2c_1 & + & 2c_2 & + & qc_3 & = & 0 \\ 3c_1 & + & pc_2 & + & 3c_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

なので基本変形により

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ & & & & (q-2)c_3 & = & 0 \\ & & (p-3)c_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

なる連立 1 次方程式を得る。$p \neq 3$ より $c_2 = 0$，$q \neq 2$ より $c_3 = 0$ となるので，最初の式より $c_1 = 0$ となる。

以上をまとめると
$p=3$ または $q=2$ のとき 1 次独立ではなく，$p \neq 3$ かつ $q \neq 2$ のとき 1 次独立である。

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ に対し線型写像 $T : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}, \qquad \mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; \text{あるベクトル}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4\text{が存在して}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})\text{ となる} \right\}$$

とするとき次の問に答えよ。

(1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \end{pmatrix}$ を行基本変形で 5 列目を除き準標準型に直せ。

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \boldsymbol{x}\text{に関する条件} \right\}$ の形に表せ。「$\boldsymbol{x}$ に関する条件」はなるべく見やすい形にせよ。

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を自分で 1 組選んで，(a) それが 1 次独立であること，(b) それが $\mathrm{Ker}(T)$ を生成することを示せ。

(4) $\mathrm{Im}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{y}\text{に関する条件} \right\}$ の形に表せ。「$\boldsymbol{y}$ に関する条件」はなるべく見やすい形にせよ。

(5) $\mathrm{Im}(T)$ の基底を自分で 1 組選んで，(a) それが 1 次独立であること，(b) それが $\mathrm{Im}(T)$ を生成することを示せ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & Z \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}\to 3\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行}\to 2\text{ 行}-1\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行}\to 1\text{ 行}-2\text{ 行}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2Y-3X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2X-Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-2Y+X \end{pmatrix}$$

学科		在籍番号		氏名	

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(T) = W(A) = W(B)$ なので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T)$ となる必要十分条件は

$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である。よって $\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\}$ となる。

(3) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ -2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底候補に選ぶ。$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = 0, c_2 = 0$ が従うので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。また任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{x} = z\boldsymbol{x}_1 + w\boldsymbol{x}_2$ と書けるので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathrm{Ker}(T)$ を生成する。以上により $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\ker(T)$ の基底となる。

(4) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(T)$ に含まれる必要十分条件は $W(A, \boldsymbol{X}) \neq \emptyset$ なので，$Z - 2Y + X = 0$ である。よって

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^2 \;\middle|\; Z - 2Y + X = 0 \right\}$$

となる。

(5) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ のとき

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 2Y - X \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を基底候補に選ぶ。$c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると $c_1 = 0, c_2 = 0$ が従うので，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は 1 次独立である。また任意のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ は $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{y}_1 + Y\boldsymbol{y}_2$ と書けるので，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は $\mathrm{Im}(T)$ を生成する。以上により $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は $\mathrm{Im}(T)$ の基底となる。