線形解析 II 第 1 回試験

2005–12–12　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき次の問に答えよ。

(1) $a = 1, b = 0$ のとき A の階数を求めよ。

(2) 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に解が存在するための条件を求めよ。解が存在するときそれをパラメータ表示せよ。

(1) $a = 1,\ b = 0$ のとき行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \leftrightarrow (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) \times (-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって階数は 2 である。

(2) $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ とおく。方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b & r \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b & r \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \end{pmatrix}$$

と変形できる。$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \end{pmatrix}$ とおく。

(1)　**$a = 1$ かつ $b = 1$ のとき**　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$ である。$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \end{pmatrix}$ が $\operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} \widetilde{B} = 1$ となる必要十分条件は $q - p = 0$ かつ $r - p = 0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - w - x - y - z \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。(次ページへ)

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

(2)　$a=1$ **かつ** $b\neq 1$ **のとき**　$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}$ なので

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&p\\0&0&0&0&0&q-p\\0&0&0&0&b-1&r-p\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{行})\to(3\text{行})\times 1/(b-1)]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&p\\0&0&0&0&0&q-p\\0&0&0&0&1&\dfrac{r-p}{b-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[(3\text{行})\leftrightarrow(2\text{行})]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&p\\0&0&0&0&1&\dfrac{r-p}{b-1}\\0&0&0&0&0&q-p\end{pmatrix}\xrightarrow[(1\text{行})\to(1\text{行})-(2\text{行})]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&p-\dfrac{r-p}{b-1}\\0&0&0&0&1&\dfrac{r-p}{b-1}\\0&0&0&0&0&q-p\end{pmatrix}$$

このとき $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=2$ である。$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&p-\dfrac{r-p}{b-1}\\0&0&0&0&1&\dfrac{r-p}{b-1}\\0&0&0&0&0&q-p\end{pmatrix}$ の階数が 2 となる必要十分条件は $q-p=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix}v\\w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-\dfrac{r-p}{b-1}-w-x-y\\w\\x\\y\\\dfrac{r-p}{b-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-\dfrac{r-p}{b-1}\\0\\0\\0\\\dfrac{r-p}{b-1}\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。

(3)　$a\neq 1$ **かつ** $b=1$ **のとき**　$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\a-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ なので

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&p\\a-1&0&0&0&0&q-p\\0&0&0&0&0&r-p\end{pmatrix}\xrightarrow[(2\text{行})\to(2\text{行})\times 1/(a-1)]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&p\\1&0&0&0&0&\dfrac{q-p}{a-1}\\0&0&0&0&0&r-p\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{行})\to(1\text{行})-(2\text{行})]{}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&p-\dfrac{q-p}{b-1}\\1&0&0&0&0&\dfrac{q-p}{a-1}\\0&0&0&0&0&r-p\end{pmatrix}$$

このとき $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=2$ である。$\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&p-\dfrac{q-p}{b-1}\\1&0&0&0&0&\dfrac{q-p}{a-1}\\0&0&0&0&0&r-p\end{pmatrix}$ の階数が 2 となる必要十分条件は $r-p=0$ である。このとき解は

$$\begin{pmatrix}v\\w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{q-p}{b-1}\\p-\dfrac{q-p}{a-1}-x-y-z\\w\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{q-p}{a-1}\\p-\dfrac{q-p}{a-1}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。(次ページへ)

(4)　$a \neq 1$ **かつ** $b \neq 1$ **のとき**　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ なので

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 & r-p \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) \times 1/(a-1)]{(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) \times 1/(b-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (3\text{ 行})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & p - \dfrac{q-p}{a-1} - \dfrac{r-p}{b-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{q-p}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{r-p}{b-1} \end{pmatrix}$$

このとき $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$ である。$\widetilde{A}$ の階数もが 3 である。解は存在して

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q-p}{a-1} \\ p - \dfrac{q-p}{a-1} - x - y - \dfrac{q-p}{b-1} \\ x \\ y \\ \dfrac{q-p}{b-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q-p}{a-1} \\ p - \dfrac{q-p}{a-1} - \dfrac{q-p}{b-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{q-p}{b-1} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次から 1 題選択して答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{K}^4$ から $\boldsymbol{K}^4$ への線型写像 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき $\mathrm{Ker}(T_A)$ および $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底を求めよ。勿論基底であることの証明は必要である。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$ とし A の 1 列目と 2 列目を入れ換えて，さらにその行列の 2 列目の 2 倍をを 3 列目に加えてできる行列を B とする。

$$W(A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = 0 \right\}, \qquad W(B) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; B\boldsymbol{x} = 0 \right\}$$

とおくとき $W(A)$ と $W(B)$ の間には一対一対応が存在するが，どのような一対一対応か述べよ。

(3) F を 3 項数ベクトル 3 個の組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2$ に対しスカラーを対応させる写像とする。F が (1) 多重線型性と (2) 交代性を満たすとき $F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ となることを示せ。

選択問題の場合 2 問以上解答するのはルール違反です。

(1) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$ とおき，$\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{y})$ とおく。

$$\widetilde{A} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (3\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & Y \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & Y-X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Z-Y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & W-Z \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-Z-X \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2X-Y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z-Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W-Z-X \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となる必要十分条件は $x = z + 2w$ かつ $y = -2z - 3w$ である。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}(T_A)$ となっている。任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T_A)$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\boldsymbol{x}_1 + w\boldsymbol{x}_2$$

と書けるので $\mathrm{Ker}(T_A) \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ となっている。また $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると第 3 成分と第 4 成分を比較することにより $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。以上により $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底となる。

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T_A)$ となる必要十分条件はあるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となることである。即ち連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が解をもつことである。$\mathrm{rank}\, A = 2$ なので，$\mathrm{rank}\, \widetilde{A} = 2$ であればよい。最初に調べた基本変形により，この条件は $Z - Y - X = 0$

かつ $W-Z-X=0$ であることが分かる。$\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in \mathrm{Im}(T_A)$ となっている。任意のベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}(T_A)$ に対し

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\X+Y\\2X+Y\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=X\boldsymbol{y}_1+Y\boldsymbol{y}_2$$

と書けるので $\mathrm{Im}(T_A)\subseteq\langle\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\rangle$ となっている。また $c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{0}$ とすると第 1 成分と第 2 成分を比較することにより $c_1=0, c_2=0$ となる。よって $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ は 1 次独立である。以上により $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ は $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底となる。

(2) $B=\begin{pmatrix}b&a&c+2a&d\\f&e&g+2e&h\end{pmatrix}$ となる。$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\in W(B)$ に対し

$$bX+aY+(c+2a)z+dW=0 \qquad fX+eY+(g+2e)Z+dW=0$$

が成立している。これは

$$a(Y+2Z)+bX+cZ+dW=0 \qquad e(Y+2Z)+fX+gZ+hW=0$$

と変形できる。よって $x{\leftrightarrow}Y+2Z, y{\leftrightarrow}X, z{\leftrightarrow}Z, w{\leftrightarrow}W$ という対応が求めるものと予想される。

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}$ とする。$T:W(A)\to W(B)$ を $\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}y\\x-2z\\x\\z\end{pmatrix}w$ と定義する。(1)$W(B)$ への写像になっていること，(2) 一対一であること，(3) 上への写像であること，の 3 つを示せばよい。

(1) $\boldsymbol{x}\in W(A)$ とすると $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ である。$\boldsymbol{y}\in W(B)$ である必要十分条件は $B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ である。

$$\begin{aligned}B\boldsymbol{y}&=\begin{pmatrix}b&a&c+2a&d\\f&e&g+2e&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&a&c+2a&d\\f&e&g+2e&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y-2z\\x\\z\\w\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}by+a(x-2z)x+(c+2a)z+dw\\fy+e(x-2z)+(g+2e)z+hw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by+cz+dw\\ex+fy+gz+hw\end{pmatrix}\\&=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

となるので (1) は成立する。

(2) $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\w'\end{pmatrix}$ とする。$T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{x}')$ とすると，

$$y=y',\quad x-2z=x'-2z',\quad z=z',\quad w=w'$$

が成立している。よって $x=x',y=y',z=z',w=w'$ すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ となり一対一が示される。

(3) $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}\in W(B)$ に対し $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}Y+2Z\\X\\Z\\W\end{pmatrix}$ とおく。

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}X\\(Y+2Z)-2Z\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}$$

となるので上への写像である。
(3)　$F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=-F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$ が成立するが $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$ のとき両者は等しいので $F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=0$ となる。他の成分に関しても同様で，2 つのベクトルが等しいときに $F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=0$ となる。$F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=C$ とおくとき，すべてのベクトルの組 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$ に対し

$$F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$$

が成立することを示す。$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ のときは C の定義なので成立している。$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)$ のときは

$$F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)=-F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=-C\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)$$

となるので成立している。同様に $F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)=-F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)=-C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)=C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)$, $F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=-F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)=-C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)=C\det(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)$, $F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=-F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=-C\det(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=C\det(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, $F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)=-F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=-C\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=C\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ となる。また異なる成分が同じベクトルのときはともに 0 になる。以上により i,j,k が $1,2,3$ のいずれかのとき

$$F(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=C\det(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)$$

が成立する。$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ を任意のベクトルとすると，$\boldsymbol{x}_1=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) &= F(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=F(x_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+F(y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= F(x_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+F(y_1\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+F(z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= x_1F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+y_1F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+z_1F(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= x_1C\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+y_1C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+z_1C\det(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(x_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+C\det(y_1\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+C\det(z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(x_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)+C\det(y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)
\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_2=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_k) &= F(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= F(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+F(\boldsymbol{x}_1,y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= F(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+F(\boldsymbol{x}_1,y_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_k)+F(\boldsymbol{x}_1,z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= x_2F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+y_2F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_k)+z_2F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= x_2C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+y_2C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_k)+z_2C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+C\det(\boldsymbol{x}_1,y_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_k)+C\det(\boldsymbol{x}_1,z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_k)+C\det(\boldsymbol{x}_1,y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_k)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_k)
\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_3=x_3\boldsymbol{e}_1+y_3\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1+y_3\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,y_3\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1)+F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,y_3\boldsymbol{e}_2)+F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= x_3F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_1)+y_3F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_2)+z_3F(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_3)\\
&= x_3C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_1)+y_3C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_2)+z_3C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_3)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1)+C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,y_3\boldsymbol{e}_2)+C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1)+C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,y_3\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,x_3\boldsymbol{e}_1+y_3\boldsymbol{e}_2+z_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= C\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の行列式を計算せよ。ただし結果は因数分解した形で記述せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix}$$

1 列目の (-1) 倍を 2 列および 3 列目に加える

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ (x_2-x_1)(x_2+x_1) & (x_3-x_1)(x_3+x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix}$$

2 列目から x_2-x_1 倍を 3 列目から x_3-x_1 倍を前に

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

1 行目の x_1 倍を 2 行目に加える

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 & x_4^2-x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3-x_1^3 & x_3^3-x_1^3 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix}$$

1 列目の (-1) 倍を 2 列および 3 列目および 4 列目に加える

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 & x_4^2-x_1^2 \\ x_2^3-x_1^3 & x_3^3-x_1^3 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 & x_4+x_1 \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$$

(2 列目から x_2-x_1倍 3 列目から x_3-x_1倍 4 列目から x_4-x_1倍を前へ)

ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 & x_4+x_1 \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 & x_4+x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

2 行目の $-x_1$ 倍を 3 行目に加える

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

1 行目の $-x_1$ 倍を 2 行目に加える

となるがこの式は (1) において $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, x_3 \to x_4$ としたものなので $(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$ となる。以上により

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

となる。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$$

を 2 行目に関して展開せよ。3 次行列の行列式はそのままの形で記述し，計算しなくてよい。

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} + x_2 \times \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。