線形解析 II 第 2 回試験

2006–2-20　　河野

注意: 答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

ある問題の解答を他の問題で使用できる場合がある。他の問題の解答を使用するときは，どの問題の解答を使用したかが分かるように**明示して**使用すること。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の直交行列による対角化を考える。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルは長さ 1 のものを選ぶこと。また 1 次独立なものを選べるときは直交するものを選ぶこと。

(3) (2) で求めた固有ベクトルを並べてできる行列を P とするとき，P の逆行列を求めよ。

(4) A を直交行列により対角化せよ。

(1)　$\Phi_A(t) = \det(tE - A) = (t-5)(t-2)^2 = 0$ より固有値は $5, 2$ である。

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく $\boldsymbol{x}$ を 5 に属する固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$ より $x = y = z$ を得る。よって固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ と書ける。$1 = |\boldsymbol{x}|^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$ より $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を採用して $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{x}$ を 2 に属する固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ より $x + y + z = 0$ を得る。$z = 0$ となるベクトルを選ぶと $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ となるが，$1 = |\boldsymbol{x}|^2 = (-x)^2 + x^2 = 2x^2$ より $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を選び $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}$ を 2 に属する固有ベクトルで $\boldsymbol{x}_2$ と直交するものとする。このとき固有ベクトルの条件から $x + y + z = 0$，直交性から $-x + y = 0$ が得られるので $y = x, z = -2x$ となり $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$ となる。$1 = |\boldsymbol{x}|^2 = x^2 + x^2 + (2x)^2 = 6x^2$ より $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となる。$x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を採用して $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が求める固有ベクトルである。ここでは最初から直交するベクトルを求めたが，最初は 1 次独立なベクトルを求めておいて，シュミットの直交化法で $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を求めてもよい。固有ベクトルは一通りに決まる分けではないので，これと異なる固有ベクトルを選んでいても，正しく選ばれているなら正解である。次の P についても同様である。

(3)　$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ より $P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ となる。

(4)　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

2 $\boxed{}$ に適当な用語・式等を入れよ。また最後の部分で与えたベクトルに対し $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を計算せよ。

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を 1 次独立なベクトルとする。このベクトルの組から正規直交系を作ることを考える。$\boldsymbol{x}_3 = \boxed{\dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_3\|}}\boldsymbol{v}_3$ とおくと，$\boldsymbol{x}_3$ は長さ 1 のベクトルになる。$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - a\boldsymbol{x}_3$ が $\boldsymbol{y}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ となるように a を決める。$\boldsymbol{y}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ より $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3) = \boxed{0}$ となる。$(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_2 - a\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3) - a(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3)$ より $a = \boxed{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3)}$ が分かる。$\boldsymbol{x}_2 = \boxed{\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}}\boldsymbol{y}_2$ とおくと $\boldsymbol{x}_2$ は長さ 1 であり，$\boldsymbol{x}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ となっている。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3$ が $\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ かつ $\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ となるように b, c を決める。$\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ より $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boxed{0}$ となる。$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2) - b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) - c(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2)$ より $b = \boxed{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2)}$ が分かる。$\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ より $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3) = \boxed{0}$ となる。$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3) - b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) - c(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3)$ より $c = \boxed{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3)}$ が分かる。$\boldsymbol{x}_1 = \boxed{\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}_1\|}}\boldsymbol{y}_1$ とおくと $\boldsymbol{x}_1$ は長さ 1 であり，$\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ かつ $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ となっている。よってこの $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は正規直交系になっている。

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき上に述べた方法で $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1$ を求めよ。**注意**：シュミットの直交化法とは微妙な所で違いがある。

$\|\boldsymbol{v}_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ なので $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{x}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}, (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{x}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_1\|}\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

3 a を定数とするとき，微分方程式

$$y' = ay$$

を解け。微分方程式を解く方法は変数分離型・演算子法等どの方法でもよい。

与えられた微分方程式は演算子 D を用いて書くと

$$(D-a)y = 0$$

となる。$e^{ax}De^{-ax} = D-a$ を用いて変形すると

$$e^{ax}De^{-ax}y = 0$$

となる。両辺に e^{-ax} をかけると $De^{-ax}y = 0$ が得られる。両辺を x で積分すると

$$e^{-ax}y = C$$

となるので

$$y = Ce^{ax}$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$$

を演算子法を使って解け。$e^{ax}De^{-ax} = D - a$ の関係式を使用してよい。

演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^{3x}$$

となる。$D^2 - 4D + 4 = (D-2)^2$ が成立している。$u = (D-2)y$ とおき $e^{2x}De^{-2x} = D - 2$ を用いて変形すると

$$e^{2x}De^{-2x}u = e^{3x}$$

となる。$v = e^{-2x}u$ とおき，両辺に e^{-2x} をかけると

$$Dv = e^{x}$$

を得る。両辺を x で積分すると

$$v = e^{x} + C_1$$

となるので

$$u = ve^{2x} = e^{3x} + C_1e^{2x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x}y = (D-2)y = u = e^{3x} + C_1e^{2x}$$

なので両辺に e^{-2x} をかけると

$$De^{-2x}y = e^{x} + C_1$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-2x}y = e^{x} + C_1x + C_2$$

となるので

$$y = e^{3x} + C_1xe^{2x} + C_2e^{2x}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y + z \qquad \frac{dy}{dt} = x + 3y + z \qquad \frac{dz}{dt} = x + y + 3z$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A を対角化する行列 P 求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。

(3) (2) の微分方程式を解け。

(4) 与えられた微分方程式を解け。

(1)　問題 1 より $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ となっている。

(2)

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$$

となる。成分で書けば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より

$$\frac{du}{dt} = 5u, \quad \frac{dv}{dt} = 2v, \quad \frac{dw}{dt} = 2w$$

となる。

(3)　問題 3 より $u = C_1e^{5t}, v = C_2e^{2t}, w = C_3e^{2t}$ となる。

(4)　$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ なので

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}C_1e^{5t} - \frac{1}{\sqrt{2}}C_2e^{2t} + \frac{1}{\sqrt{6}}C_3e^{2t} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}C_1e^{5t} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_2e^{2t} + \frac{1}{\sqrt{6}}C_3e^{2t} \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}C_1e^{5t} - \frac{2}{\sqrt{6}}C_3e^{2t} \end{aligned}$$

となる。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 微分方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

を実数値関数の範囲で解けという問題に対し次のような解答があった。この解答を 100 点を満点として採点し $\boxed{}$ に点数を書け。また 100 点満点でない場合は，減点した理由を述べよ。更に与えられた解答に自分の解答を加え満点をとれる解答とせよ。ただし次の定理は使用してもよい。

定理 微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ (a, b は定数) に対し初期値 a_0, a_1 を任意に与えたとき，$y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす微分方程式の解が唯 1 つ存在する。

解答： $y_1 = e^x \cos x$ は微分方程式の実数値解関数であり，$y_2 = e^x \sin x$ も実数値解関数である。C_1, C_2 を任意の実数とするとき

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

は微分方程式の実数値解関数になる。よってこれが求める一般解である。

点数 $\boxed{\quad 50 \quad}$

(満点でない場合) 減点理由： 微分方程式の解関数であることは分かるが，一般解であること，すなわちすべての解がその形に書かれることを示していない。点数は満点でなければ何点であっても正解とする。ただし理由が正しい場合のみ加点される。「計算過程が書いていないので減点」というのは立場により見解が異なるので間違いではないが，加点していない。

(満点でない場合) 解答： (上の解等に引き続き :) $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ が実数値解関数であることは示したので，これが一般解であることを示す。z を与えられた微分方程式の解とする。仮に $z = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ という形をしていると仮定すると $z(0) = C_1$ である。また $z' = C_1 e^x \cos x - C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$ なので $z'(0) = C_1 + C_2$ となっている。

ここで $y_0 = z(0) e^x \cos x + (z'(0) - z(0)) e^x \sin x$ とおくと $z(0) = y_0(0)$, $z'(0) = y_0'(0)$ が成立する。z および y_0 は微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解であり，$z(0) = y_0(0)$ および $z'(0) = y_0'(0)$ が成立する。定理より解は唯 1 つなので $z = y_0$ となる。よって

$$z = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

と書ける。よって一般解であることが証明された。