線形解析 II 第 2 回試験

2006–2–20　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

ある問題の解答を他の問題で使用できる場合がある。他の問題の解答を使用するときは，どの問題の解答を使用したかが分かるように**明示して**使用すること。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の直交行列による対角化を考える。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルは長さ 1 のものを選ぶこと。また 1 次独立なものを選べるときは直交するものを選ぶこと。

(3) (2) で求めた固有ベクトルを並べてできる行列を P とするとき，P の逆行列を求めよ。

(4) A を直交行列により対角化せよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

2 $\boxed{\qquad\qquad}$ に適当な用語・式等を入れよ。また最後の部分で与えたベクトルに対し $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を計算せよ。

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を 1 次独立なベクトルとする。このベクトルの組から正規直交系を作ることを考える。$\boldsymbol{x}_3 = \boxed{\qquad\qquad} \boldsymbol{v}_3$ とおくと，$\boldsymbol{x}_3$ は長さ 1 のベクトルになる。$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - a\boldsymbol{x}_3$ が $\boldsymbol{y}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ となるように a を決める。$\boldsymbol{y}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ より $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3) = \boxed{\qquad\qquad}$ となる。$(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_2 - a\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3) - a(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3)$ より $a = \boxed{\qquad\qquad}$ が分かる。$\boldsymbol{x}_2 = \boxed{\qquad\qquad} \boldsymbol{y}_2$ とおくと $\boldsymbol{x}_2$ は長さ 1 であり，$\boldsymbol{x}_2 \perp \boldsymbol{x}_3$ となっている。$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3$ が $\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ かつ $\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ となるように b, c を決める。$\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ より $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boxed{\qquad\qquad}$ となる。$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2) - b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) - c(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2)$ より $b = \boxed{\qquad\qquad}$ が分かる。$\boldsymbol{y}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ より $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3) = \boxed{\qquad\qquad}$ となる。$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_1 - b\boldsymbol{x}_2 - c\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3) - b(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) - c(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3)$ より $c = \boxed{\qquad\qquad}$ が分かる。$\boldsymbol{x}_1 = \boxed{\qquad\qquad} \boldsymbol{y}_1$ とおくと $\boldsymbol{x}_1$ は長さ 1 であり，$\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$ かつ $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_3$ となっている。よってこの $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は正規直交系になっている。

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき上に述べた方法で $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1$ を求めよ。**注意**：シュミットの直交化法とは微妙な所で違いがある。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を定数とするとき，微分方程式

$$y' = ay$$

を解け。微分方程式を解く方法は変数分離型・演算子法等どの方法でもよい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$$

を演算子法を使って解け。$e^{ax}De^{-ax} = D - a$ の関係式を使用してよい。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y + z \qquad \frac{dy}{dt} = x + 3y + z \qquad \frac{dz}{dt} = x + y + 3z$$

を考える。ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A を対角化する行列 P 求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，$\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式を求めよ。

(3) (2) の微分方程式を解け。

(4) 与えられた微分方程式を解け。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 微分方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

を実数値関数の範囲で解けという問題に対し次のような解答があった。この解答を 100 点を満点として採点し $\boxed{}$ に点数を書け。また 100 点満点でない場合は，減点した理由を述べよ。更に与えられた解答に自分の解答を加え満点をとれる解答とせよ。ただし次の定理は使用してもよい。

定理 微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ (a, b は定数) に対し初期値 a_0, a_1 を任意に与えたとき，$y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ を満たす微分方程式の解が唯 1 つ存在する。

解答： $y_1 = e^x \cos x$ は微分方程式の実数値解関数であり，$y_2 = e^x \sin x$ も実数値解関数である。C_1, C_2 を任意の実数とするとき

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

は微分方程式の実数値解関数になる。よってこれが求める一般解である。

点数 $\boxed{}$

(**満点でない場合**) **減点理由**：

(**満点でない場合**) **解答**：