線型代数 I 第 1 回試験

2006–6–30　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1　ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を n 項数ベクトルとするとき結合法則

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$$

が成立することを示せ。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ を任意の n 項数ベクトルとする。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ \vdots \\ + \end{array} \begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} + \\ \vdots \\ + \end{array} \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

2　$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のそれぞれと直交する長さ 1 の 4 項数ベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とすると，与えられたそれぞれのベクトルと直交するので内積は 0 である。よって

$$x+y+z=0, \quad y+z+w=0, \quad y+2z+3w=0$$

を得る。この連立 1 次方程式を解くと

$$x=w, \quad y=w, \quad z=-2w$$

となる。求めるベクトルの長さは 1 なので

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{w^2+w^2+(-2w)^2+w^2} = \sqrt{7w^2} = 1$$

より $w = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ を得る。よって求めるベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ が正則 (逆行列をもつ) であるための必要十分条件を求めよ。また正則のとき逆行列を求めよ。

与えられた行列を A とする。$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対し $AB = E$ (E は単位行列) が成立しているとすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21}+bx_{31} & x_{12}+x_{22}+bx_{32} & x_{12}+x_{23}+bx_{33} \\ x_{21}+cx_{31} & x_{22}+cx_{32} & x_{23}+cx_{33} \\ ax_{31} & ax_{32} & ax_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立している。このとき $ax_{33} = 1$ なる解が存在するためには $a \neq 0$ が必要である。このとき $ax_{31} = 0,\ ax_{32} = 0$ より $x_{31} = 0,\ x_{32} = 0$ となる。また $x_{33} = \dfrac{1}{a}$ である。

$x_{12} + cx_{31} = 0$ に代入すると $x_{12} = 0$ を得る。また $x_{22} + cx_{32} = 1$ に代入して $x_{22} = 1$ を得る。更に $x_{23} + cx_{33} = 0$ に代入することにより $x_{23} = -\dfrac{c}{a}$ を得る。

$x_{11} + x_{21} + bx_{31} = 1$ に $x_{21} = 0, x_{31} = 0$ を代入することにより $x_{11} = 1$ を得る。$x_{12} + x_{22} + bx_{32} = 0$ に $x_{22} = 1, x_{32} = 0$ を代入することにより $x_{12} = -1$ を得る。$x_{13} + x_{23} + bx_{33}$ に $x_{33} = 1,\ x_{23} = -\dfrac{c}{a}$ を代入することにより $x_{13} = \dfrac{c-b}{a}$ を得る。すなわち

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{c-b}{a} \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{a} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

となる。

逆に $a \neq 0$ のとき X は $AX = E$ かつ $XA = E$ をみたし A の逆行列になる。

以上により A が正則である必要十分条件は $a \neq 0$ であり，$a \neq 0$ のとき逆行列は

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{c-b}{a} \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{a} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ n は 2 以上の自然数とする。$A_n = (a_{ij})$ を n 次行列とする。ただし a_{ij} は $a_{i\,i+1} = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を満たし，これ以外は 0 であるものとするとき次の問いに答えよ。。
(1) $n = 3, 4$ の場合 A_n がどのような行列か書き下してみよ。
(2) この行列に対し A_3^3，A_4^4 を計算せよ (計算過程も書くこと)。
(3) この行列に対し A_n^n を計算せよ。

(1) $n = 3$ のとき $a_{12} = a_{23} = 1$ であり，それ以外は 0 である。$n = 4$ のとき $a_{12} = a_{23} = a_{34} = 1$ であり，それ以外は 0 である。よって

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。
(2)

$$A_3^2 = A_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $A_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

$$A_4^2 = A_4 A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $A_4^4 = \left(A_4^2\right)\left(A_4^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $A_n^k = \left(b_{ij}^{(k)}\right)$ とおく $(k = 1, 2, \ldots, n)$。「$b_{ij}^{(k)}$ は $j = i + k$ のとき以外は 0 である」ことを示せば $k = n$ のとき $j = i + n$ をみたす i, j $(1 \leqq, j \leqq n)$ は存在しないので $A_n^n = O$(零行列) が分かる。
次の命題を $P(k)$ とし，数学的帰納法で $P(k)$ を証明する。

『自然数 k に対し $A_n^k = (a(k)_{ij})$ とおくとき $a(k)_{i\,i+k} = 1$ でありそれ以外は 0 である。』

$k = 1$ のとき $a(k)_{ij} = a(1)_{ij} = a_{ij}$ なので $P(1)$ は成立する。よって $k = \ell$ のとき成立を仮定する; 即ち $A_n^\ell = (a(\ell)_{ij})$ は上の性質をみたしていると仮定する。

$$(a(\ell+1)_{ij}) = A_n^{\ell+1} = A_n^\ell A_n = (a(\ell)_{ij})(a_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} a(\ell)_{is} a_{sj}\right)$$

より $a(\ell+1)_{ij} = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a(\ell)_{is} a_{sj}$ が成立している。仮定より $s \neq i+\ell$ のとき $a(\ell)_{is} = 0$ なので $a(\ell+1) = a(\ell)_{i\,i+\ell} a_{i+\ell\,j}$ となる。$j \neq i+\ell+1$ のとき $a_{i+\ell\,j} = 0$ なので $a(\ell+1)_{ij}$ は $j = i+\ell+1$ のとき 1 それ以外は 0 である。よって $P(\ell+1)$ は成立する。
数学的帰納法により任意の k に対し $P(k)$ が成立することが証明された。特に $k = n$ のとき $P(n)$ が成立する。$A_n^n = (a(n)_{ij})$ は $j = n + i$ 以外は 0 であるが，$1 \leqq i, j \leqq n$ なのでこれをみたす i, j は存在しない。よって任意の i, j (ただし $1 \leqq i, j \leqq n$) に対し $a(n)_{ij} = 0$ となる。以上により A_n^n が零行列であることが示された。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\textbf{5}}$ 次の行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件を求めよ。また解をもつとき解をパラメータ表示せよ。ただし a, q, r は定数であり，ただし解ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & r-1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & r-1 \end{pmatrix}$$

となるので与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} v + w + x + y + z & = & 1 \\ (a-1)v + 0w + 0x + 0y + 0z & = & q-1 \\ 0v + 0w + 0x + 0y + (-1)z & = & r-1 \end{cases}$$

と同値である。$a = 1$ のとき解を持つためには $q - 1 = 0$ が必要である。$a \neq 1$ のとき常に解は存在する。よって $a = 1$ とそれ以外の場合に場合分けする。

(a) $a = 1$ のとき解を持つ必要十分条件は $q - 1 = 0$ である。このとき $v + w + x + y + z = 1$ と $z = 1 - r$ を用いて v を w, x, y で表すと

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-r \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。

(b) $a \neq 1$ のとき常に解は存在する。また $v = \dfrac{q-1}{a-1}$ かつ $z = 1 - r$ を用いて w を x, y で表すと

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q-1}{a-1} \\ \dfrac{q-1}{a-1} + r \\ 0 \\ 0 \\ 1-r \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示できる。

$\boxed{\textbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。