線型代数 I 第 2 回試験

2006–7–28　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1　次の $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x+y-z+w=0, x+y+z+w=0 \right\}$$

とする。V はベクトル空間になるか。なる場合は証明し，ならない場合は反例をあげよ。ただし $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V がベクトル空間とは次の 3 つの性質をみたすときをいう。

(1)　$V \neq \emptyset$

(2)　任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$

(3)　任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in V$

(1)　$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0-0+0=0$ かつ $0+0+0+0=0$ が成立するので $\mathbf{0} \in V$ である。よって $V \neq \emptyset$ となる。

(2)　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると $x+y-z+w=0$, $x+y+z+w=0$, $x'+y'-z'+w'=0$, $x'+y'+z'+w'=0$ が成立している。このとき $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ w+w' \end{pmatrix}$ であり,

$$\begin{aligned} (x+x')+(y+y')-(z+z')+(w+w') &= (x+y-z+w)+(x'+y'-z'+w') = 0+0 = 0 \\ (x+x')+(y+y')+(z+z')+(w+w') &= (x+y+z+w)+(x'+y'+z'+w') = 0+0 = 0 \end{aligned}$$

が成立している。よって $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$ である。

(3)　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとし，α を任意の実数とする。$x+y-z+w=0$, $x+y+z+w=0$ が成立している。このとき $\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix}$ であり,

$$\begin{aligned} (\alpha x)+(\alpha y)-(\alpha z)+(\alpha w) &= \alpha(x+y-z+w) = \alpha 0 = 0 \\ (\alpha x)+(\alpha y)+(\alpha z)+(\alpha w) &= \alpha(x+y+z+w) = \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

が成立している。よって $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ である。(1),(2),(3) により V はベクトル空間であることが分かる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。ただし a は定数とする。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

3 つのベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とおく。$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$ から $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が導かれるとき 1 次独立であった。
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおくとベクトル方程式 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$ は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ と同値である (ここで $\boldsymbol{c}$ を未知数とみている)。$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & a & 0 \end{pmatrix}$ とおき基本変形を実行する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - 2 \times (2\text{ 行})]{}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - 3 \times (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ は連立 1 次方程式

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0, \quad (a-1)c_3 = 0$$

と同値である。$a = 1$ とそうでない場合に場合分けする。
(1)　$a = 1$ のとき，$(a-1)c_3 = 0$ は恒等式になるので，連立 1 次方程式は

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0$$

となる。このとき，例えば $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = -1$ は連立 1 次方程式の解になる。よってこの連立 1 次方程式は $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ 以外の解をもつ。
(2)　$a \neq 1$ のとき $(a-1)c_3 = 0$ の両辺を $a - 1$ で割ると $c_3 = 0$ を得る。これを他の式に代入すると $c_1 = 0, c_2 = 0$ となる。このとき解は $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみである。

以上により $a \neq 1$ のとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立であり，$a = 1$ のとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立でない。

解答では基本変形を用いた連立 1 次方程式の変形を用いたが，他の方法でも勿論よい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のベクトル空間の基底 (候補) を 1 組選び，基底であることを証明せよ。与えられた集合がベクトル空間であることの証明はしなくてよい。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+3z+3w=0, 2x+3y+8z+7w=0 \right\}$

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

解く過程で基底を探すことが必要になるが，この部分が分からない学生は対応する演習問題等で確認すること。解答は基底を見つけたとして，それ以降の部分だけでよい (勿論その過程を記述してもよい)。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であるとは (a) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である，(b) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V を生成する ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ であり，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対し実数 a_1, a_2 が存在して $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$ と書ける) ことを示せばよい (ただしここで述べたのは基底を構成するベクトルの個数が 2 個の場合)。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおきこれが基底であることを示す。

(a) $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ が成立しているとする。このとき $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - 2c_2 \\ -2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

(b) $-1 + (-2) + 3\cdot 1 + 3\cdot 0 = 0,\ 2(-1) + 3(-2) + 8\cdot 1 + 7\cdot 0 = 0,\ -2 + (-1) + 3\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0,\ 2(-2) + 3(-1) + 8\cdot 0 + 7\cdot 1 = 0$ より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ は成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を V の任意のベクトルとすると $x+y+3z+3w=0, 2x+3y+8z+7w=0$ が成立している。この式より $x = -z-2w, y = -2z-w$ を得る。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-2w \\ -2z-w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2w \\ -w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\boldsymbol{x}_1 + w\boldsymbol{x}_2$$

となり $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V を生成する。

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とおきこれが基底であることを示す。

(a) $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ が成立しているとする。このとき $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $c_2 = 0$ となる。これを $c_1 + 2c_2 = 0$ に代入して $c_2 = 0$ を得る。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である。

(b) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ は成立している。$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{x}_3 = 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4 = 3\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_1$ が成立している。$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすると実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 + \alpha_4\boldsymbol{x}_4$ と表すことができる。このとき

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3(2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + \alpha_4(3\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_1) = (\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4)\boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4)\boldsymbol{x}_2$$

となるので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V を生成する。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ A を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

とする。T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線型写像とする。このとき次の問いに答えよ。ただし $\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{あるベクトル}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\text{が存在して}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) \right\}$ である。ベクトルの成分としてどのような文字を用いてもよいが，見易さのためここでは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

とおいて解け。

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{ここに式がはいる} \right\}$ の形で表せ。

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ を生成するベクトルを求めよ。1 次独立性は調べなくてもよい。

(3) $\mathrm{Im}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \text{ここに式がはいる} \right\}$ の形で表せ。

(4) $\mathrm{Im}(T)$ を生成するベクトルを求めよ。1 次独立性は調べなくてもよい。

$\widetilde{A} = (A\ \boldsymbol{y})$ とおき基本変形を実行する。$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 2 & 3 & 4 & Y \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Z \\ 3 & 4 & 5 & 6 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行}) \to (2\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 3 & 4 & 5 & Z \\ 3 & 4 & 5 & 6 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 3 & 4 & 5 & 6 & W \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - (1\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Z-X \\ 3 & 3 & 3 & 3 & W-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行}) \to (3\text{ 行}) - 2\cdot(2\text{ 行})]{}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \\ 3 & 3 & 3 & 3 & W-X \end{pmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行}) \to (4\text{ 行}) - 3\cdot(2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X-3Y+W \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \leftrightarrow (2\text{ 行})]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & Y-X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X-3Y+W \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行}) \to (1\text{ 行}) - (2\text{ 行})]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & Y-2X \\ 0 & 1 & 2 & 3 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X-3Y+W \end{pmatrix}$

(1)　連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くための基本変形は上の基本変形で $X = 0, Y = 0, Z = 0, W = 0$ としたものなので $x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0$ となる。よって $\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0 \right\}$ と書ける。

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると $x - z - 2w = 0, y + 2z + 3w = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選べる。

(3)　最初の基本変形より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が解を持つため必用十分条件は $X - 2Y + Z = 0, 2X - 3Y + W = 0$ である。よって $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, X - 2Y + Z = 0, 2X - 3Y + W = 0 \right\}$ となる。

(4)　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$ とすると $X - 2Y + Z = 0, 2X - 3Y + W = 0$ が成立している。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ -X \\ -2X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 2Y \\ 3Y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ となるので基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を選べる。