線型代数 I 第 2 回試験

2006–7–28　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; x+y-z+w=0, x+y+z+w=0 \right\}$$

とする。V はベクトル空間になるか。なる場合は証明し，ならない場合は反例をあげよ。ただし $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V がベクトル空間とは次の 3 つの性質をみたすときをいう。

(1) $V \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in V$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。ただし a は定数とする。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のベクトル空間の基底 (候補) を 1 組選び，基底であることを証明せよ。与えられた集合がベクトル空間であることの証明はしなくてよい。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + 3z + 3w = 0, 2x + 3y + 8z + 7w = 0 \right\}$

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ A を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

とする。T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線型写像とする。このとき次の問いに答えよ。ただし $\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \right\}$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{あるベクトル}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\text{が存在して}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) \right\}$ である。ベクトルの成分としてどのような文字を用いてもよいが，見易さのためここでは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

とおいて解け。

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{ここに式がはいる} \right\}$ の形で表せ。

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ を生成するベクトルを求めよ。1 次独立性は調べなくてもよい。

(3) $\mathrm{Im}(T)$ を $\left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{ここに式がはいる} \right\}$ の形で表せ。

(4) $\mathrm{Im}(T)$ を生成するベクトルを求めよ。1 次独立性は調べなくてもよい。