線型代数 II 第 1 回試験 (A)

2006–12–18　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とするとき次の問に答えよ。

(1) $\widetilde{A} = (A\,\boldsymbol{b})$ に対し行基本変形を行い，第 5 列を除き準標準形に直せ。

(2) 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に解が存在するための条件を求めよ。解が存在するときそれをパラメータ表示せよ。

(1)　$\widetilde{A}$ に行基本変形を実行して (途中経過省略)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b-1 \end{pmatrix}$$

を得る。(この行列は一意ではない。即ち他の行列であることもある。ただし，それにより (2) の条件が変わることはない。)

(2)　解が存在する条件は $a-1=0$ かつ $3b-1=0$ なので $a=1$ かつ $b=\dfrac{1}{3}$ である。このとき

$$x = -z + \frac{2}{3}, \quad y = -w - \frac{1}{3}$$

なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + \frac{2}{3} \\ -w - \frac{1}{3} \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示される。(パラメータ表示は一意ではない。)

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

2 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

計算方法は複数ある。結果のみ書す。

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

対称行列の逆行列が対称行列であることに気が付けば，対称行列でない結果がでたときは間違いだと分かる。

$\frac{1}{4}$ が抜けていました。

3 次は行列式を計算するために基本変形を何回か実行ながら計算した状態を示している。引き続き計算を実行し行列式を求めよ。(最終結果がでなくても計算過程に加点するので，どのような変形を行ったか見易いように書いて欲しい。)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & x_4-x_1 & x_4^2-x_1^2 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & x_4-x_1 & (x_4-x_1)(x_4+x_1) & (x_4-x_1)(x_4^2+x_4x_1+x_1^2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$$

(問題の式) $= (x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & x_3^3-x_1^3 \\ 0 & 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix} = (x_4-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 \\ 0 & 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 0 & 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 \\ 0 & 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 \\ 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2-x_1(x_2+x_1) \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2-x_1(x_3+x_1) \\ 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2-x_1(x_4+x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2 \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2 \\ 1 & x_4+x_1 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1-x_1\times 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3+x_1-x_1\times 1 & x_3^2 \\ 1 & x_4+x_1-x_1\times 1 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 0 & x_4-x_2 & x_4^2-x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_4-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 0 & 1 & x_4+x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_4-x_2)(x_3-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & x_3-x_2 \\ 0 & 1 & x_4+x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_4-x_2)(x_3-x_2)(x_4-x_3)$$

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\
1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\
1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3
\end{vmatrix}
$$

を 2 行目に関して展開せよ。3 次行列の行列式はそのままの形で記述し，計算しなくてよい。

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\
1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\
1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3
\end{vmatrix}
= (-1)
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\
x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\
x_4 & x_4^2 & x_4^3
\end{vmatrix}
+ x_2
\begin{vmatrix}
1 & x_1^2 & x_1^3 \\
1 & x_3^2 & x_3^3 \\
1 & x_4^2 & x_4^3
\end{vmatrix}
- x_2^2
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^3 \\
1 & x_3 & x_3^3 \\
1 & x_4 & x_4^3
\end{vmatrix}
+ x_2^3
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 \\
1 & x_3 & x_3^2 \\
1 & x_4 & x_4^2
\end{vmatrix}
$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。