線型代数 II 第 2 回試験

2007–2–5　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ シュミットの直交化法とは 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対し

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{x}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_k\|}\boldsymbol{y}_k \quad (k \geqq 1)$$

と帰納的においていくと正規直交系が得られるというものであった。

(1) $\boldsymbol{y}_2 \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}_3 \neq \mathbf{0}$ が成立することを示せ。

$\boldsymbol{y}_2 = \mathbf{0}$ とすると $\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ が成立する。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立なので $1 = 0$ となり矛盾，よって $\boldsymbol{y}_2 \neq \mathbf{0}$ である。

$\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{0}$ とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{y}_2 \\ &= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\left(\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1\right) \\ &= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\boldsymbol{v}_2 - \left(\frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|} - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{y}_2\|}\frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\right)\boldsymbol{v}_1\end{aligned}$$

が成立する。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立なので $1 = 0$ となり矛盾。よって $\boldsymbol{y}_2 \neq \mathbf{0}$ である。

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ とするときシュミットの直交化法で $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を求めよ。

$\|\boldsymbol{x}_1\| = \sqrt{2}$ なので，$\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ となる。$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ となる。よって $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ である。

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2) = 2$ なので $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ となる。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は直交するのでそれぞれの内積は 0 になる。ベクトルを得たあと内積を計算することにより間違いがチェックできる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{2}$ 2 次の対称行列が直交行列によって対角化可能であることを次にしたがって示せ。(3) は $\boxed{}$ に適当な文字式または方程式を入れよ。

(1) Y を対称行列，X を直交行列とするとき，X^TYX が対称行列であることを示せ。ただし X^T は X の転置行列とする。

Y は対称行列なので $Y^T = Y$ が成立している。X は直交行列なので $X^TX = E$ (単位行列) が成立している。行列 A, B に対し $(AB)^T = B^TA^T$ が成立しているので，

$$(X^TYX)^T = (YX)^T(X^T)^T = X^TY^TX = X^TYX$$

となる。ここで $(X^T)^T = X$ の関係を使用した。よって X^TYX は対称行列である。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とする。A の特性解が実数であることを示せ。

特性方程式は $\Phi_A(t) = \det(tE - A) = t^2 - 2at + a^2 - b^2 = 0$ なので判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = b^2 \geqq 0$$

となるので特性解は実数である。

(3) λ_1 を A の固有値 (の 1 つ)，$\boldsymbol{x}_1$ を λ_1 に属する固有ベクトルとする。ただし $|\boldsymbol{x}_1| = 1$ とする。また $\boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}_1$ と直交し，$|\boldsymbol{x}_2| = 1$ となるベクトルとする。このとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は正規直交系なので $O = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)$ は直交行列である。また $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底になるので $A\boldsymbol{x}_2 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ となる実数 α, β が存在する。ここで

$$AO = A(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = (A\boldsymbol{x}_1\ \boxed{A\boldsymbol{x}_2}\,) = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & \boxed{\alpha} \\ \boxed{0} & \boxed{\beta} \end{pmatrix}$$

であり，$A_1 = O^TAO$ は対称行列なので $\boxed{\alpha = 0}$ が成立し A_1 は対角行列になる。よって対角化できることが分かる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の直交行列による対角化を考える。

(1) A の特性解を求めよ。

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & t-2 & -2 & -2 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t-4 & t-4 & t-4 & t-4 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= (t-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-4)t^3 = 0
\end{aligned}$$

よって特性解は $t = 0, 4$ である。

(2) (1) で求めた A の特性解のなかで重解でないものに対応する固有ベクトルを求めよ。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を 4 に属する A の固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ より (ここでは計算は省略。ここの計算をきちんと書いておくと計算間違いをしても部分点がある) $x = y = z = w$ となる。よって固有ベクトルとして $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選択する。

(3) (1) で求めた A の特性解のなかで重解であるものに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルはできるだけ多くの 1 次独立なベクトルを選ぶこと。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を 0 に属する A の固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$ より (ここでは計算は省略。ここの計算をきちんと書いておくと計算間違いをしても部分点がある) $x + y + z + w = 0$ となる。よって固有ベクトルとして $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選択する。これらは 1 次独立である。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

(4) (1) で求めた A の特性解のなかで重解であるものに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルはできるだけ多くの 1 次独立なベクトルを選ぶこと。ただし，固有ベクトルは長さ 1 のものを選ぶこと。また 1 次独立なものを選べるときは直交するものを選ぶこと。(3) で求めたものからシュミットの直交化法で求めてもよいし，直接求めてもよい。

解答の多くがシュミットの直交化法を用いていたので，ここではシュミットの直交化法を用いないで直接求める方法を解説する。(3) よりベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が 0 に対応する固有ベクトルである必要十分条件は $x + y + z + w = 0$ である。これを満たすベクトルから正規直交系になるものを選ぶ。$\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 0 に属する固有ベクトルなのでこれの実数倍のベクトルで長さ 1 になるものとして $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選ぶ。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}_1$ と直交する必用十分条件は $x - y = 0$ なので $\boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{y}_3$ は $\boldsymbol{x}_2$ と直交する 0 に属する固有ベクトルである。よって $\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ と直交する必用十分条件は $x - y = 0$ かつ $z - w = 0$ なので $\boldsymbol{y}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{y}_3$ は $\boldsymbol{x}_2$ および $\boldsymbol{x}_3$ と直交する 0 に属する固有ベクトルである。よって $\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく。

(5) A を対角化せよ。

$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とおくと P は直交行列なので $P^T = P^{-1}$ である。よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。