線型代数 II 第 2 回試験

2007–2–5　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ シュミットの直交化法とは 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{x}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_k\|}\boldsymbol{y}_k \quad (k \geqq 1)$$

と帰納的においていくと正規直交系が得られるというものであった。

(1) $\boldsymbol{y}_2 \neq \mathbf{0},\ \boldsymbol{y}_3 \neq \mathbf{0}$ が成立することを示せ。

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とするときシュミットの直交化法で $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を求めよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 次の対称行列が直交行列によって対角化可能であることを次にしたがって示せ。(3) は $\boxed{}$ に適当な文字式または方程式を入れよ。

(1) Y を対称行列，X を直交行列とするとき，X^TYX が対称行列であることを示せ。ただし X^T は X の転置行列とする。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とする。A の特性解が実数であることを示せ。

(3) λ_1 を A の固有値 (の 1 つ)，$\boldsymbol{x}_1$ を λ_1 に属する固有ベクトルとする。ただし $|\boldsymbol{x}_1| = 1$ とする。また $\boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}_1$ と直交し，$|\boldsymbol{x}_2| = 1$ となるベクトルとする。このとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は正規直交系なので $O = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)$ は直交行列である。また $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底になるので $A\boldsymbol{x}_2 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ となる実数 α, β が存在する。ここで

$$AO = A(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = (A\boldsymbol{x}_1\ \boxed{}\ ) = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

であり，$A_1 = O^TAO$ は対称行列なので $\boxed{}$ が成立し A_1 は対角行列になる。よって対角化できることが分かる。

$\boxed{\textbf{3}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の直交行列による対角化を考える。

(1) A の特性解を求めよ。

(2) (1) で求めた A の特性解のなかで重解でないものに対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) (1) で求めた A の特性解のなかで重解であるものに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルはできるだけ多くの 1 次独立なベクトルを選ぶこと。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

(4) (1) で求めた A の特性解のなかで重解であるものに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルはできるだけ多くの 1 次独立なベクトルを選ぶこと。ただし，固有ベクトルは長さ 1 のものを選ぶこと。また 1 次独立なものを選べるときは直交するものを選ぶこと。(3) で求めたものからシュミットの直交化法で求めてもよいし，直接求めてもよい。

(5) A を対角化せよ。