線型代数続論試験

2004–7–27　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問に答えよ。

(1) W が線型空間 V の部分空間である事の定義を述べよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $T_A : \boldsymbol{K}^4 \longrightarrow \boldsymbol{K}^4$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。$W = \mathrm{Ker}(T_A)$ とするとき W が $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間である事を示せ。

(3) ベクトルの有限集合 S が線型空間 W の基底である事の定義を述べよ。

(4) W の基底を自分で 1 つ選び，それが実際基底になっている事を示せ。

これは線形解析の復習問題です。

(1) V の部分集合 W が次の 3 つの条件を満たすとき，部分空間と呼ぶ。

(1) W は空集合ではない。

(2) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ が成立する。

(3) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ が成立する。

(2) $W = \mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ なので $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{0} \in W$ となり，$W \neq \emptyset$ となる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となっている。$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ となる。$\boldsymbol{x} \in W$ と $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ なので $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ である。以上により W が部分空間である事が分かる。

(3) $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ が V の基底であるとは

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立であり,

(2) S は W を生成する，即ち $W = \langle S \rangle$ となる

の 2 つが成立する事をいう。

(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が W の基底である事を示す。$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である。

$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}_1 \in W$ となるので，$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subseteq W$ となる。逆に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{aligned} y + z + w &= 0 \\ z + w &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

となる。これより $y = z = w = 0$ となるので,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{x}_1$$

が成立し，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$，即ち $W \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となる。併せて $W = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ となるので，$\boldsymbol{x}_1$ は W の基底になる。

裏にも問題あり，別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $V = C^\infty(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$ を実数で定義された実数に値をとる C^∞ 級関数のつくる集合とする。また $W = \{\, y \in V \mid\ y'' - 4y' + 5y = 0 \,\}$ を V の元であって線型微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ の解関数となるもの全体がつくる集合とする。次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。
定理： 初期値 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を 1 組与えると，その初期値を持つ微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解関数が唯 1 つ存在する。

(1) W が V の部分空間である事を示せ。

(2) y_1 を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 1$ となる W の元とする。y_2 を $y_2(0) = 1, y_2'(0) = -1$ となる W の元とする。y_1, y_2 が 1 次独立であるかどうか調べよ。

(3) z_1 を $z_1(0) = -1, z_1'(0) = 1$ となる W の元とする。z_2 を $z_2(0) = 1, z_2'(0) = -1$ となる W の元とする。z_1, z_2 が 1 次独立であるかどうか調べよ。

(4) W の基底を自分で 1 つ選び，それが実際に基底になっている事を示せ。

(1) O を恒等的に 0 である写像とすると $O'' - 4O' + 5O = 0$ なので $O \in W$ となり，$W \neq \emptyset$ となる。W の任意の元 y, z に対し $y''-4y'+5y = 0, z''-4z'+5z = 0$ が成立している。$(y+z)' = y'+z'$ 及び $(y+z)'' = y''+z''$ が成立するので，$(y+z)''-4(y+z)'+5(y+z) = y''+z''-4y'-4z'+5y+5z = (y''-4y'+5y)+(z''-4z'+5z) = 0+0 = 0$ となり，$y+z \in W$ となる。W の任意の元 y と任意の実数 α に対し $(\alpha y)' = \alpha y'$ 及び $(\alpha y)'' = \alpha y''$ が成立しているので，$(\alpha y)'' - 4(\alpha y)' + 5(\alpha y) = \alpha y'' - 4\alpha y' + 5\alpha y = \alpha(y'' - 4y' + 5y) = \alpha 0 = 0$ となり，$\alpha y \in W$ となる。以上により W が V の部分空間である事が示される。

(2) $a_1y_1 + a_2y_2 = 0$ が成立しているとする。x で微分すると $a_1y_1' + a_2y_2' = 0$ を得る。両式に $x = 0$ を代入すると，$a_1 + a_2 = 0$ 及び $a_1 - a_2 = 0$ を得る。これより $a_1 = a_2 = 0$ となるので，y_1, y_2 は 1 次独立である。

(3) $z = z_1 + z_2$ とおくと z は微分方程式の解関数であり，$z(0) = z_1(0) + z_2(0) = 0, z'(0) = z_1'(0) + z_2'(0) = 0$ を満たす。恒等的に 0 である関数 O も微分方程式の解であり，$O(0) = 0, O'(0) = 0$ なので，定理より z と O は等しい。よって z_1, z_2 は 1 次独立ではない。

(4) $S = \{y_1, y_2\}$ とする。S の 1 次独立性はすでに示した。$y_1, y_2 \in W$ なので $\langle S \rangle \subseteq W$ となる。y を W の任意の元とする。

$$z = \frac{y(0) + y'(0)}{2} y_1 + \frac{y(0) - y'(0)}{2} y_2$$

とおくと，$z(0) = y(0), z'(0) = y'(0)$ であり，ともに微分方程式の解関数になっている。よって定理より，$y = z$ となる。$y \in \langle S \rangle$ となるので，$W = \langle S \rangle$ となり，併せて S が基底である事が示される。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 線型空間 L の内積とは次の条件を満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ であった。
$\boldsymbol{L}$ の各元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ の元 α に対し次が成立する。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す。

(1) (**正値性**) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ になるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る。

(2) (**共役対称性**) $\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) (**線型性**)

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

2) $(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

このとき次を示せ。
(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。
(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

試験のときに訂正しましたが (3) は $(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ です。

(1) $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ となるので，両辺から $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ を引いて $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ を得る。

(2) 共役複素数に関しては $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 及び $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ が成立する。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) &= \overline{(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} \\
&= \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} + \overline{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})
\end{aligned}
$$

となる。

(3)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) &= \overline{(\alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \\
&= \overline{\alpha (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \\
&= \overline{\alpha}\, \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \\
&= \overline{\alpha} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

となる。

裏にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ 上の線型写像 T が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y}))$$

を満たすときエルミート変換という。
(1) λ を T の固有値とするとき，λ は実数である事を示せ。
(2) λ_1, λ_2 を T の相異なる固有値とし，$\boldsymbol{x}_1$ を λ_1 に属する T の固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ を λ_2 に属する T の固有ベクトルとする。$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ が直交する ($(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる事を意味する) 事を示せ。

(1) λ を T の固有値とし，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する T の固有ベクトルとする。定義により $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である。

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\ &= (T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{x})) \\ &= (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) \\ &= \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

が成立する。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ より両辺を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で割ると $\lambda = \overline{\lambda}$ が得られる。よって λ は実数である。

(2)

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ &= (T(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) \\ &= \overline{\lambda_2}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ &= \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}2)\end{aligned}$$

より $(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ を得る。$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ より $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。

ここは内容に関係なく書いてあれば括弧内の点数が与えられます。この様な項目を設けているのは，次回以降の講義の参考にするためです。出席していない人には答えようがないので,「数学について思うこと」という項目を加えています。