線型代数続論試験

2004–7–27　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

1 次の問に答えよ。

(1) W が線型空間 V の部分空間である事の定義を述べよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $T_A : \boldsymbol{K}^4 \longrightarrow \boldsymbol{K}^4$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。$W = \mathrm{Ker}(T_A)$ とするとき W が $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間である事を示せ。

(3) ベクトルの有限集合 S が線型空間 W の基底である事の定義を述べよ。

(4) W の基底を自分で 1 つ選び，それが実際基底になっている事を示せ。

裏にも問題あり，別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $V = C^\infty(\boldsymbol{R}\,;\boldsymbol{R})$ を実数で定義された実数に値をとる C^∞ 級関数のつくる集合とする。また $W = \{\, y \in V \mid\ y'' - 4y' + 5y = 0 \,\}$ を V の元であって線型微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ の解関数となるもの全体がつくる集合とする。次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。

定理： 初期値 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ を 1 組与えると，その初期値を持つ微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解関数が唯 1 つ存在する。

(1) W が V の部分空間である事を示せ。

(2) y_1 を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 1$ となる W の元とする。y_2 を $y_2(0) = 1, y_2'(0) = -1$ となる W の元とする。y_1, y_2 が 1 次独立であるかどうか調べよ。

(3) z_1 を $z_1(0) = -1, z_1'(0) = 1$ となる W の元とする。z_2 を $z_2(0) = 1, z_2'(0) = -1$ となる W の元とする。z_1, z_2 が 1 次独立であるかどうか調べよ。

(4) W の基底を自分で 1 つ選び，それが実際に基底になっている事を示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 線型空間 L の内積とは次の条件を満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ であった。
$\boldsymbol{L}$ の各元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{K}$ の元 α に対し次が成立する。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す。

(1) (**正値性**) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ になるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る。

(2) (**共役対称性**) $\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) (**線型性**)

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

2) $(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

このとき次を示せ。
(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成立する。
(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する。

裏にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 計量線型空間 $\boldsymbol{L}$ 上の線型写像 T が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ に対し

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y}))$$

を満たすときエルミート変換という。

(1) λ を T の固有値とするとき，λ は実数である事を示せ。

(2) λ_1, λ_2 を T の相異なる固有値とし，$\boldsymbol{x}_1$ を λ_1 に属する T の固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ を λ_2 に属する T の固有ベクトルとする。$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ が直交する ($(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ となる事を意味する) 事を示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。