線型代数続論第１回小テスト

2004–6–22　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

1 次の問に答えよ。

(1) W が線型空間 V の部分空間である事の定義を述べよ。

(2) $V = \boldsymbol{R}^4$, $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$ とするとき W が V の部分空間である事を示せ。

(3) ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が 1 次独立である事の定義を述べよ。

(4) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ が 1 次独立である事を示せ。

(5) ベクトルの有限集合 S が線型空間 W の基底である事の定義を述べよ。

(6) $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ とする。ただし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は (4) のものとする。S が W の基底である事を示せ。

この部分の様に青色で書かれた部分は注意等であり，解答例の部分ではありません。

(1) V の部分集合 W が次の 3 つの条件を満たすとき W を V の部分空間と呼ぶ：

(1) $W \neq \emptyset$ 即ち W は空集合ではない。

(2) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ となる。

(3) W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ が成立する。

(2) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し $0+0+0+0=0$ が成立するので $\mathbf{0} \in W$ となる。よって $W \neq \emptyset$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとする。このとき $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$ となるが, $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4) = 0+0 = 0$ となるので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$ となる。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとし，α を任意のスカラーとする。$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix}$ となる。$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 = \alpha(x_1+x_2+x_3+x_4) = \alpha 0 = 0$ となるので $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ となる。

(3) $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$ となるのが $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ に限るとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立であるという。

(4) $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ とする，即ち

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。成分で書くと $a_1 + a_2 + a_3 = 0, -a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_1 - a_2 + a_3 = 0, -a_1 + a_2 - 3a_3 = 0$ となる。(1 式)−(2 式) より $a_1 = 0$ となる。(1 式)−(3 式) より $a_2 = 0$ となる。(1 式) に代入する事により $a_3 = 0$ となる。よって 1 次独立性が示された。

裏にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(5) $S=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ が (1)$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ は1次独立，(2)S は W を生成する，即ち $W=\langle S\rangle$ となる，の 2 つの性質を持つとき S は W の基底であるという。
(6) S は1次独立であるから，W を生成する事を示せばよい。$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\in W$ なので $\langle S\rangle\subseteq W$ は成立している。逆に $W\subseteq\langle S\rangle$ を示す。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ を W の任意のベクトルとすると $x+y+z+w=0$ が成立している。予備的計算として，$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+a_3\boldsymbol{v}_3$ が成立しているとして，係数を表してみる。計算を実行すると $a_1=\dfrac{x-y}{2},a_2=\dfrac{x-z}{2},a_3=\dfrac{y+z}{2}$ となる。

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{x-z}{2}\boldsymbol{v}_2+\frac{y+z}{2}\boldsymbol{v}_3 &= \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{x-z}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\frac{y+z}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\\-x-y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となるので逆が示され，併せて $W=\langle S\rangle$ が分かる。

$\boxed{2}$ $V=C^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$ を実数で定義された実数に値をとる C^∞ 級関数のつくる集合とする。また $W=\{y\in V\mid y''-4y'+5y=0\}$ を V の元であって線型微分方程式 $y''-4y'+5y=0$ の解関数となるもの全体がつくる集合とする。次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。
定理： 初期値 $y(0)=a_0,y'(0)=a_1$ を 1 組与えると，その初期値を持つ微分方程式 $y''+ay'+by=0$ の解関数が唯 1 つ存在する。
(1) W が V の部分空間である事を示せ。
(2) y_1 を $y_1(0)=1,y_1'(0)=1$ となる W の元とする。y_2 を $y_2(0)=1,y_2'(0)=-1$ となる W の元とする。y_1,y_2 が 1 次独立である事を示せ。
(3) $S_0=\{y_1,y_2\}$ とするとき，S_0 が W の基底である事を示せ。
(4) S_0 とは異なる W の基底 S を自分で選び，それが実際に基底である事を示せ。

(1) 形式的には問 1(1) と同じなので省略。
(2) $a_1y_1+a_2y_2=0$ (恒等的に等しい事を意味する) とする。$x=0$ を代入すると $a_1y_1(0)+a_2y_2(0)=a_1+a_2=0$ となる。両辺を x で微分すると $a_1y_1'+a_2y_2'=0$ となる。$x=0$ を代入すると $a_1-a_2=0$ となる。2 つの式より $a_1=0,a_2=0$ が従う。よって y_1,y_2 は1次独立である。
(3) 1次独立性は (2) で示したので $W=\langle y_1,y_2\rangle$ を示せば，S_0 が W の基底である事が分かる。$y_1,y_2\in W$ より $\langle y_1,y_2\rangle\subseteq W$ は分かる。逆に y を W に属する任意の関数とする。ここで $y=a_1y_1+a_2y_2$ を仮定して係数がどう表されるかを見る。$x=0$ を代入して $y(0)=a_1+a_2$，微分した式に $x=0$ を代入して，$y'(0)=a_1-a_2$ となる。よって $a_1=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2},a_2=\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}$ となる。$z=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2}y_1+\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}y_2$ と置く。$z(0)=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2}y_1(0)+\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}y_2(0)=y(0)$, $z'(0)=\dfrac{y(0)+y'(0)}{2}y_1'(0)+\dfrac{y(0)-y'(0)}{2}y_2'(0)=y'(0)$ となる。$y,z\in W$ なので，定理 (同じ初期値を持つ微分方程式の解関数は唯 1 つ) より，$z=y$ となる。よって $y\in\langle y_1,y_2\rangle$ となり，$W\subseteq\langle y_1,y_2\rangle$ が示される。
(4) 1次独立になるように初期値を選べばなんでもよい。z_1 を $z_1(0)=1,z_1'(0)=0$ となる W の元とする。z_2 を $z_2(0)=0,z_2'(0)=1$ となる W の元とする。$a_1z_1+a_2z_2=0$ とする。$x=0$ を代入すると $a_1z_1(0)+a_2z_2(0)=a_1=0$ となる。微分して $x=0$ を代入すると $a_1z_1'(0)+a_2z_2'(0)=a_2=0$ となる。よって z_1,z_2 が1次独立である事が分かる。$z_1,z_2\in W$ なので $\langle z_1,z_2\rangle\subseteq W$ が分かる。y を W の任意の元とする。(3) と同様に $y=a_1z_1+a_2z_2$ と仮定して係数がどう表されるかを見る。$x=0$ を代入して $y(0)=a_1z_1(0)+a_2z_2(0)=a_1$，微分した関数に $x=0$ を代入して $y'(0)=a_1z_1'(0)+a_2z_2'(0)=a_2$ となる。$z=y(0)z_1+y'(0)z_2$ とおくと，y と z は同じ初期値を持つ微分方程式の解関数なので，定理より $y=z$ となる。よって $y\in\langle z_1,z_2\rangle$ となり，$W\subseteq\langle z_1,z_2\rangle$ となる。併せると $W=\langle z_1,z_2\rangle$ が分かり，z_1,z_2 は W を生成するので z_1,z_2 は W の基底である。