拡張版DSについて

河野正晴 (北見工業大学)

ESおよびラベル付グラフの定義は横山さんのもの (**2001年箱根セミナー記録 [予定]**) を参照して下さい。私がラベル付グラフと呼んでいたものは **1–ラベル付グラフ**という呼び名に変更したいと思います。

ここでグラフといったら vertex を含まない loop (津久井さんに従ってこれを hoop と呼ぶ) も許す事にする。fake sureface P に対し 3rd singularity の集合を $V(P)$，2nd singularity の集合を $E(P)$，1st singularity の集合を $F(P)$ と書く。グラフ G に対し vertex の集合を $V(G)$，edge(hoop も edge と呼ぶ) の集合を $E(G)$ と書く。ここでグラフは位相空間と考えている。

定義 1 $\Sigma = (S, G, f)$ が extended DS diagram (拡張版 DS diagram 略して ES と書く) であるとは以下の条件を満たす事とする。S は 2 球面，G は S 上の 3–regular なグラフである。f は S からある closed fake surface P への onto な local homeomorphism で次を満たす。

(1) $f|_{V(G)} : V(G) \to V(P)$ は pointwise に 4 対 1

(2) $f|_{E(G)} : E(G) \to E(P)$ は pointwise に 3 対 1

(3) $f|_{S-G} : S - G \to F(P)$ は pointwise に 2 対 1

ただし，$F(P)$ の各成分 X に対し $f^{-1}(X)$ は 2 つの成分を持つとする。
B を 3 球体で，$\partial B = S$ と考えたとき, B/f を $M(\Sigma)$ と書く。

定義 2 (S, G, g) がラベル付きグラフであるとは以下の条件を満たすこととする。S, G は定義 1 と同じとする。g は $U(G)$(G の S における正則近傍) から fake surface T_g への onto な local homeomorphism で次を満たすものとする。

(1) $g|_{V(G)} : V(G) \to V(T_g)$ は pointwise に 4 対 1

(2) $g|_{E(G)} : E(G) \to E(T_g)$ は pointwise に 3 対 1

(3) $g|_{U(G)-G} : U(G) - G \to F(T_g)$ は pointwise に 2 対 1

ただし，$F(T_g)$ の各成分 X に対し $g^{-1}(X)$ は 2 つの成分を持つとする。

ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し適当な近傍 $U(G)$ を選ぶと，$g = f|_{U(G)}$ に対し，(S, G, g) はラベル付きグラフになる。このラベル付きグラフを $L(\Sigma)$ と書く。

定義 3 (S, G, h) が 1–ラベル付きグラフであるとは以下の条件を満たすこととする。S, G は定義 1 と同じとする。G_h をある (4–regular) graph，h を G から G_h への onto な local homeomorphism で $E(G)$ 上では pointwise に 3 対 1，$V(G)$ 上では pointwise に 4 対 1 なもの。

ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $h = f|_G$ と置くと，(S, G, h) は 1–ラベル付きグラフになる。この 1–ラベル付きグラフを $L_1(\Sigma)$ と書く。またラベル付グラフ $L = (S, G, g)$ に対し $h = g|_G$ と置くと，(S, G, h) は 1–ラベル付きグラフになる。この 1–ラベル付きグラフを $L_1(L)$ と書く。

この定義では 1–ラベル付きグラフという感じがしないかもしれないので，次の様に G の edge に向き付きラベルがついていると考えてもよい。G_h の 向き付けられた edge(open arc または hoop) C に対し，$h^{-1}(C)$ が 3 つの成分のとき，それぞれに向き付きラベル C を付ける。edge C が open arc のときはこの場合しか起きない。$h^{-1}(C)$ が 2 つの成分からなるときはそれ上で h が 2 対 1 になっている成分に $2C$ (このときこのラベルを 2–type と呼ぶ)，1 対 1 になっている成分に C のラベルを付ける (ただしラベル付きグラフが ES から定義される場合，これはおきない；補題 6 参照)。$h^{-1}(C)$ が連結のときはラベル $3C$ を付ける (このときこのラベルを 3–type と呼ぶ)。

次に ES，(1–) ラベル付きグラフの同値を定義しよう。

定義 4 2 つの ES $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G', f')$ が同値であるとは S から S への homeomorphism F と P から P' への homeomorphism H が存在して $f' \circ F = H \circ f$ を満たす事をいう。このとき $\Sigma \equiv \Sigma'$ と書く。

またラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$，$L' = (S, G', g')$ が同値であるとは $U(G)$ から $U(G')$ への homeomorphism F と T_g から $T_{g'}$ への homeomorphism H が存在して $g' \circ F = H \circ g$ を満たす。このとき $L \equiv L'$ と書く。

また 1–ラベル付きグラフ $L_1 = (S, G, h)$，$L'_1 = (S, G', h')$ が同値であるとは G から G' への homeomorphism F と G_g から $G_{g'}$ への homeomorphism H が存在して $h' \circ F = H \circ h$ を満たす。このとき $L_1 \equiv L'_1$ と書く。

以下同値な GS，ラベル付きグラフは同値を与える F で引き戻して考えることにより $G = G'$ で identity が 2 つの同値を与えていると仮定する。

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d, "f'"'] & U(G) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g"] & U(G') \arrow[d, "g'"'] & G \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h"'] & G' \arrow[d, "h'"'] \\
P \arrow[r, "H"] & P' & T_g \arrow[r, "H"] & T_{g'} & G_h \arrow[r, "H"] & G_{h'}
\end{tikzcd}
$$

以上の準備により我々は次の様な定理を記述できる。

定理 5 2 つの ES $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G', f')$ が同じラベル付きグラフを決めるとき，つまり $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ となるとき，$M(\Sigma)$ と $M(\Sigma')$ は同相，即ち $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$。

いくつかの補題を証明しながら定理を証明しよう。

補題 6 ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $L(\Sigma)$ は 2–type のラベルを持たない。

証明　ラベル $2C$ をもつ edge はその両側が identify されざるを得ない。このとき残りのラベル C を持つ edge はその両側で identify されるので，これは f が local homeohorphism であることに反する。 ∎

ES $\Sigma = (S, G, f)$ が与えられると, $S - G$ 上の free involution τ が以下の様に決まる : $p \in S - G$ に対し $f^{-1}f(p) = \{p, p'\}$ とするとき，$\tau(p) = p'$ とする。この Σ から決まる involution を $\tau(\Sigma)$ という記号で表わす。

グラフ G の regular neighborhood $U(G)$ を 1 つ固定し，f を同値の範囲で取り換えて，$U(G) - G$ が $\tau(\Sigma)$ で不変になるようにする。$\tau(\Sigma)$ を $S - \mathring{U}(G)$ に制限したものも同じ記号で表す。$U(G)$ に block bundle の構造を入れ，f を同値の範囲で更に取り換えて，(レベルもこめて) block bundle の構造を保っているようにする。以下 出てくる f, f' などの identification map はこの条件を満たしているものと仮定する。

(1–) ラベル付きグラフ (S, G, g) が与えられると $U(G)$ の block bundle の構造から $\partial U(G)$ がラベル付けられていると考えることができる。ただし， 3–type のラベルの付いている edge は 3 つの block の境界になっているものとする。G の edge は $\partial U(G)$ 上に対応する edge を 2 つもつがその edge 同士を twin と呼ことにする。

この free involution $\tau(\Sigma)$ は 1) $L(\Sigma)$ のラベル付けと compatible ，つまり $\tau(\Sigma)$ は $\partial U(G)$ 上ラベル付き edge を向きも含め同じラベル付きの edge に写す 2) $\tau(\Sigma)$ は twin edge 同士を写さない，の 2 つの性質を持っている。

逆に (1–) ラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$ に対し $S - \mathring{U}(G)$ 上の free involution τ が存在して，1) τ は L のラベル付けと compatible で 2) τ は twin edge 同士を写さないとする。この involution を L と compatible な free involution と呼ぶ。このときある ES $\Sigma = (S, G, f)$ が存在して，$L = L(\Sigma)$ かつ $\tau = \tau(\Sigma)$ となっている。このことを補題の形で述べておく。

補題 7 ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $\tau(\Sigma)$ は $L(\Sigma)$ と compatible な free involution である。逆にラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$ に対し L と compatible な free involution τ が存在するとき，ES $\Sigma = (S, G, f)$ が存在して，$L = L(\Sigma)$,$\tau = \tau(\Sigma)$ が成立する。

F_1, F_2 を同相な surface で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ を満たすものとし，τ を F_1 から F_2 への同相写像とする。$\mathring{F}_2$ 内の loop c に対し T_c を c に沿った Dehn twist とする。

τ_1 を $\tau_1(x) = \begin{cases} \tau(x) & (x \notin \tau^{-1}(U(c))) \\ T_c\tau(x) & (x \in \tau^{-1}(U(c))) \end{cases}$ とする。τ, τ_1 を $F = F_1 \cup F_2$ 上の involution になるように拡張しておく。この変形を「c に沿った基本 Dehn 変形」と呼び，τ_1 は τ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られるという。ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $\tau = \tau(\Sigma)$ を考える。$S - \mathring{U}(G)$ のある成分 F_1 に対し $F_2 = \tau(F_1)$ とする。$\mathring{F}$ 内に loop c をとり $\tau|_{F_1 \cup F_2}$ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られる involution を τ_1 とする。$F_1 \cup F_2$ の部分は τ_1 それ以外は τ で与えられる involution を τ' とすると τ' は $L = L(\Sigma)$ と compatible な free involution になっている。

ラベル付グラフ $L(\Sigma)$ とこの involutionτ' に対し，補題 7 より，ES $\Sigma' = (S, G, f')$ で $L(\Sigma) = L(\Sigma')$, $\tau' = \tau(\Sigma')$ となるものが存在する。このとき $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った ± 1 Dehn suegery で得られる。

また c は B で proper な 2–disc$D$ を張っている。$f(c)$ は $M(\Sigma)$ で 2–disc$f(D)$ を張るので，$f(c)$ は trivial knot である。tirivial knot に沿った Dehn surgery は多様体を変えないので $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ が成立する。これらを補題の形で書いておく。

補題 8 2 つの ES $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G, f')$ を考える。

c を $S - U(G)$ 内の loop とする。$\tau' = \tau(\Sigma')$ が $\tau = \tau(\Sigma)$ から c 沿った基本 Dehn 変形で得られるとき，$M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った Dehn surgery で得られる。逆に $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った Dehn surgery で得られるならば，$\tau' = \tau(\Sigma')$ は $\tau = \tau(\Sigma)$ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られる。

このとき特に $M(\Sigma') \cong M(\Sigma)$ が成立する。

以上により次の命題を示せば定理が証明できる。

命題 9 F_1, F_2 を planer surface with boundary で τ, τ' を $\tau(F_1) = F_2$ を満たす $F = F_1 \cup F_2$ 上の free involution で $\tau|_{\partial F} = \tau'|_{\partial F}$ を満たすとする。このとき τ は τ' から 有限回の基本 Dehn 変形で得られる。ここで isotopic (rel ∂) な homeomorphism は同じと見ている。

証明 $\sharp(\partial F_1)$ (∂F_1 の component の数) についての帰納法で示す。

(1)$\sharp(\partial F_1) = 1$ のとき，F_1 は disc なので τ, τ' は isotopic。よって成立する。

(2)$\sharp(\partial F_1) < n$ のとき成立を仮定する。今 $\sharp(\partial F_1) = n$ とする。F_1 上に proper な arc m をとる。

(2-0)$\tau(m) \cap \tau'(m)$ が 2 点で $\tau(m)$ と $\tau'(m)$ が isotopic (rel ∂) のとき：isotopy で変形することにより $\tau(m) = \tau'(m)$ と仮定できる。$F_1' = F_1 - \mathring{U}(m)$, $F_2' = \tau(F_1')$ に対し帰納法の仮定を適応すれ事により，τ, τ' に関しても成立することが分かる。

(2-1)$\tau(m) \cap \tau'(m)$ が 2 点のとき：図 1,2 の c に沿って τ' に対し基本 Dehn 変形を行う。この結果できる involution を τ_1 とする (以下同じ)。図 1 の場合は更に図 5 の c にそって基本 Dehn 変形を行うことにより，(2-0) の場合に帰着できる。

(2-2)$\tau(m \cap \tau'(m))$ が 3 点以上のとき： 図 3 の様な部分が存在したとすると，図 3 の変形で intersection を減らす事ができる。よって intersection は同じ向きで起こっているとしてよい。このとき intersection が 3 点以上であれば，図 4 または図 5 の様な部分が存在するのでやはり intersection を減らすことが出来る。

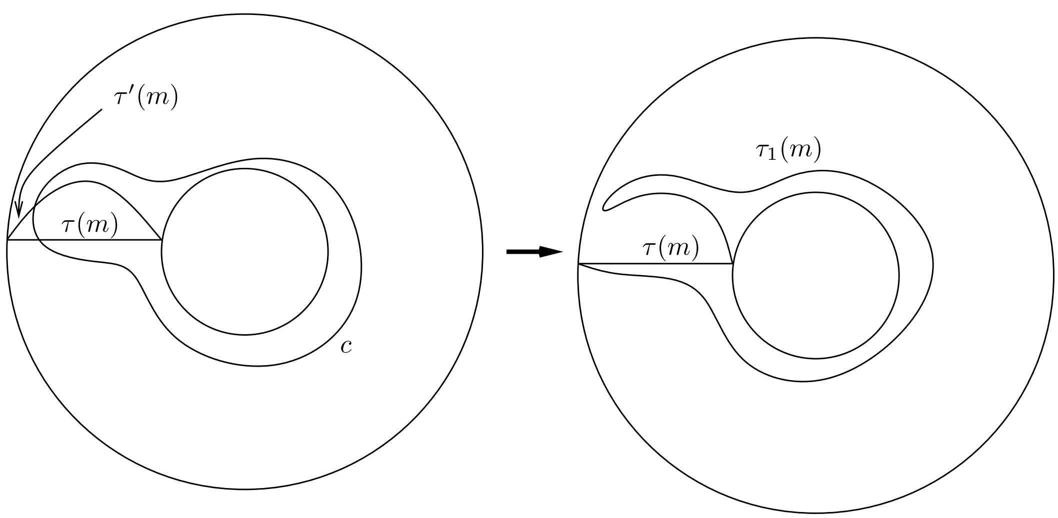

図 1

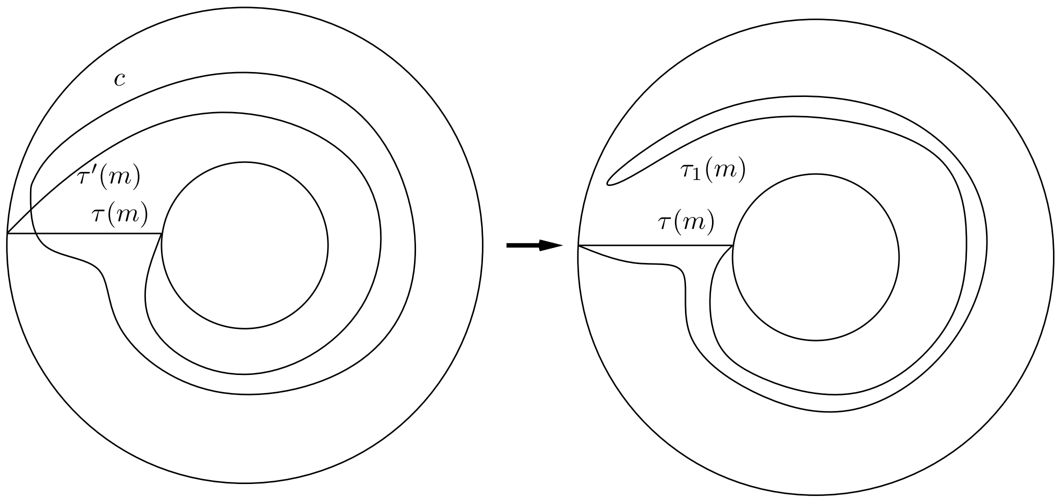
c
$\tau'(m)$
$\tau(m)$
$\tau_1(m)$
$\tau(m)$

図 2

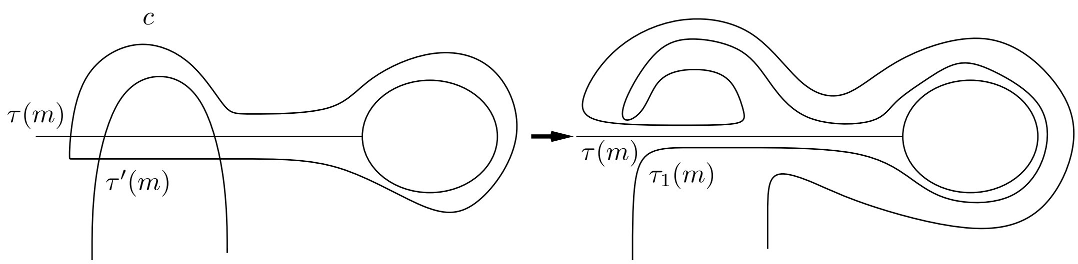
c
$\tau(m)$
$\tau'(m)$
$\tau(m)$
$\tau_1(m)$

図 3

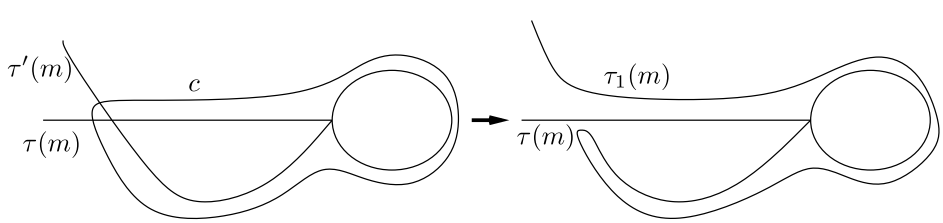
$\tau'(m)$
c
$\tau(m)$
$\tau_1(m)$
$\tau(m)$

図 4

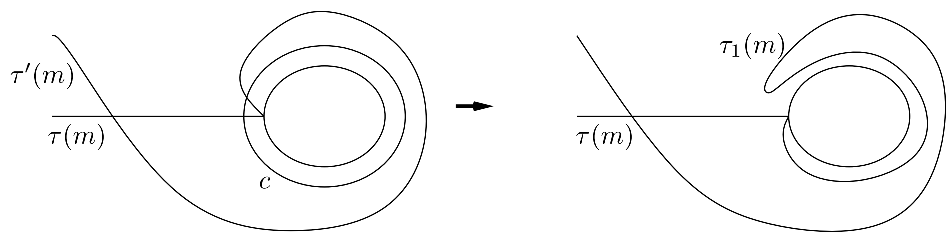

図 5