1 調和振動と等速円運動

1.1 調和振動の式

- $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ の函数形を持つ時刻 t の函数を**調和振動**と呼ぶことにしよう。

  問題 1 $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ のグラフを xt 平面上に図示せよ。A, ω, φ が図中のどの長さにあたるか図示すること。

- 上の式で A は $\boxed{\qquad\qquad}$、ω は $\boxed{\qquad\qquad}$、φ は $\boxed{\qquad\qquad}$ と呼ばれる。

1.2 sin と cos の重ね合わせ

- 与えられた A, ω, φ に対して

$$A\sin(\omega t + \varphi) = C_0 \cos\omega t + C_1 \sin\omega t \tag{1}$$

  を満たす定数 C_0, C_1 を A, φ で表すと $C_0 = \boxed{\qquad\qquad}$, $C_1 = \boxed{\qquad\qquad}$ である。(三角函数の加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$ を用いる。実はあとでやるように指数函数を用いるとこんなものは使わなくてすむ。)

- 上の式 (1) は、$\boxed{\qquad\qquad}$ の値が ω の調和振動でありさえすれば、$\boxed{\qquad\qquad}$ (即ち A) や $\boxed{\qquad\qquad}$ (即ち φ) がどんな値であっても $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の重ね合わせで表せることを意味する。

- 上の式 (1) を逆に読めば $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の任意の重ね合わせは、ω を角振動数に持ち、なにがしかの振幅と位相を持った調和振動になることを意味する。

  問題 2 与えられた定数 C_0, C_1 に対して (1) を満たす正の数 A と $0 \le \varphi < 2\pi$ なる定数 φ が丁度ひと組定まることを確認せよ。

- もっと一般に、

$$\boxed{\text{角振動数 } \omega \text{ の調和振動の重ね合わせはまた角振動数 } \omega \text{ の調和振動}}$$

という**重ね合わせの原理**が成り立つ訳である。数学の言葉で言えば集合 $\{\omega$ を角振動数に持つ調和振動の全体$\}$ がベクトル空間をなすことに他ならない。式 (1) は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ がこのベクトル空間の $\boxed{}$ になっていることを意味している。

問題 3 上の重ね合わせの原理の主張を証明せよ。

1.3 複素平面上の等速円運動

- 複素平面上の点 $z = 1$ を時刻 $t = 0$ に出発し単位円周上を反時計回りに角速度 ω で運動する点の時刻 t における位置は $z = \boxed{}$ である。

- これを実部と虚部に分けると

$$\boxed{} = \cos\omega t + i\sin\omega t \tag{2}$$

である。式 (2) は $\cos\omega t$ や $\sin\omega t$ が複素平面上の $\boxed{}$ 運動の実軸や虚軸への射影と思えることを意味する。

- 一般に複素数 z の実部 $\mathrm{Re}(z)$ と虚部 $\mathrm{Im}(z)$ は z とその共役複素数 $\bar{z}$ を用いて

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

と表せるので (2) から

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}) = \boxed{}\, e^{i\omega t} + \boxed{}\, e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

$$\sin\omega t = \mathrm{Im}(e^{i\omega t}) = \boxed{}\, e^{i\omega t} + \boxed{}\, e^{-i\omega t} \tag{4}$$

となり $\cos\omega t$ や $\sin\omega t$ は ω を角速度に持つ反時計回りの $\boxed{}$ 運動と時計回りの $\boxed{}$ 運動の重ね合わせで書ける訳である。

- (1)(3)(4) から結局、任意の調和振動 $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ は

$$\boxed{A\sin(\omega t+\varphi) = \alpha_0 e^{i\omega t} + \alpha_1 e^{-i\omega t}}$$

の形、即ち ω を角速度に持つ反時計回りの $\boxed{\qquad\quad}$ 運動と時計回りの $\boxed{\qquad\quad}$ 運動の重ね合わせで書ける訳である。ここで定数 α_0, α_1 は A, φ を用いて

$\alpha_0 = \boxed{\qquad\qquad}$, $\alpha_1 = \boxed{\qquad\qquad}$ と表される。

- 上では「(1)(3)(4) から」と述べたが

  $$A\sin(\omega t+\varphi) = A\cdot\mathrm{Im}(e^{i(\omega t+\varphi)}) = A\frac{e^{i(\omega t+\varphi)} - e^{-i(\omega t+\varphi)}}{2i} = \boxed{\qquad}e^{i\omega t} + \boxed{\qquad}e^{-i\omega t}$$

  とすれば直接出来てしまう。これに (2) を用いれば三角函数の加法定理を用いずに (1) が再現出来る。

- 逆に、ω を角速度に持つ反時計回りの $\boxed{\qquad\quad}$ 運動 $e^{i\omega t}$ と時計回りの $\boxed{\qquad\quad}$ 運動 $e^{-i\omega t}$ の任意の重ね合わせの実部と虚部はそれぞれ ω を角振動数に持つ調和振動になっている。

- このような実部と虚部がともに角振動数 ω の調和振動になっているような複素平面上の運動を**複素数値調和振動**と呼ぶことにすれば、上のことは「$e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の重ね合わせは角振動数 ω の複素数値調和振動である」と表現出来る。

- 逆に、与えられた（角振動数 ω の）複素数値調和振動に対して、実部と虚部はそれぞれ角振動数 ω の調和振動だからそれぞれ $e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の重ね合わせに書き直して整理すると、複素数値調和振動は $e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の複素係数の重ね合わせで書けるということがわかる。

1.4 まとめ

- 角振動数 ω の調和振動であることと $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の重ね合わせであることとは同等である。

- 角振動数 ω の調和振動同士の重ね合わせはまた角振動数 ω の調和振動である。（重ね合わせの原理）

- 角振動数 ω の複素数値調和振動（角振動数 ω の調和振動を実部と虚部に持つ複素平面上の運動）は、角速度 ω の反時計回りの等速円運動 $e^{i\omega t}$ と時計回りの等速円運動 $e^{-i\omega t}$ の複素係数の重ね合わせと同等である。