数学の考え方

2007年 秋学期 第13回目の講義
(01月22日　15:23版)
渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

数学的帰納法（その2）

数学的帰納法: ある性質 P がすべての自然数 n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

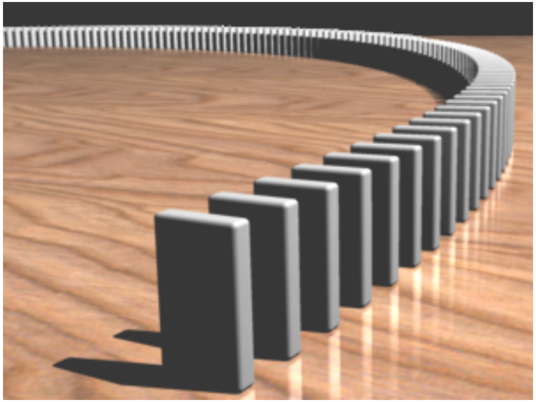
(1) P は n=0 のとき成り立つ （帰納法の初め）
(2) もし n=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ（帰納法のステップ）

の２つを証明する，という論法を**数学的帰納法**（または単に**帰納法**）という

数学的帰納法: ある性質 P がすべての自然数 n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=0 のとき成り立つ （帰納法のはじめ）
(2) もし n=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.



将棋倒し
Domino effect（ドミノ効果）

写真の出典: Mathematical induction
From Wikipedia, the free encyclopedia

数学的帰納法のバリエーション（変種） その1

ある性質 P がすべての自然数 $n \geq k$ （$n = k, k+1, k+2, k+3 \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=k のとき成り立つ （帰納法のはじめ）
(2) もしn=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.

数学的帰納法のバリエーション（変種） その2

ある性質 P がすべての自然数 n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=0 のとき成り立つ （帰納法のはじめ）
(2) もしすべてのn≤m に対して P が成り立つなら，P は n=m+1 に対しても成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.

注意： すべての自然数 n に対して,「すべての自然数 $k \leq n$ に対して命題 P が成り立つ」が成り立つことを，もとの形の帰納法で証明することを考えると，これは上の形の帰納法証明になる.

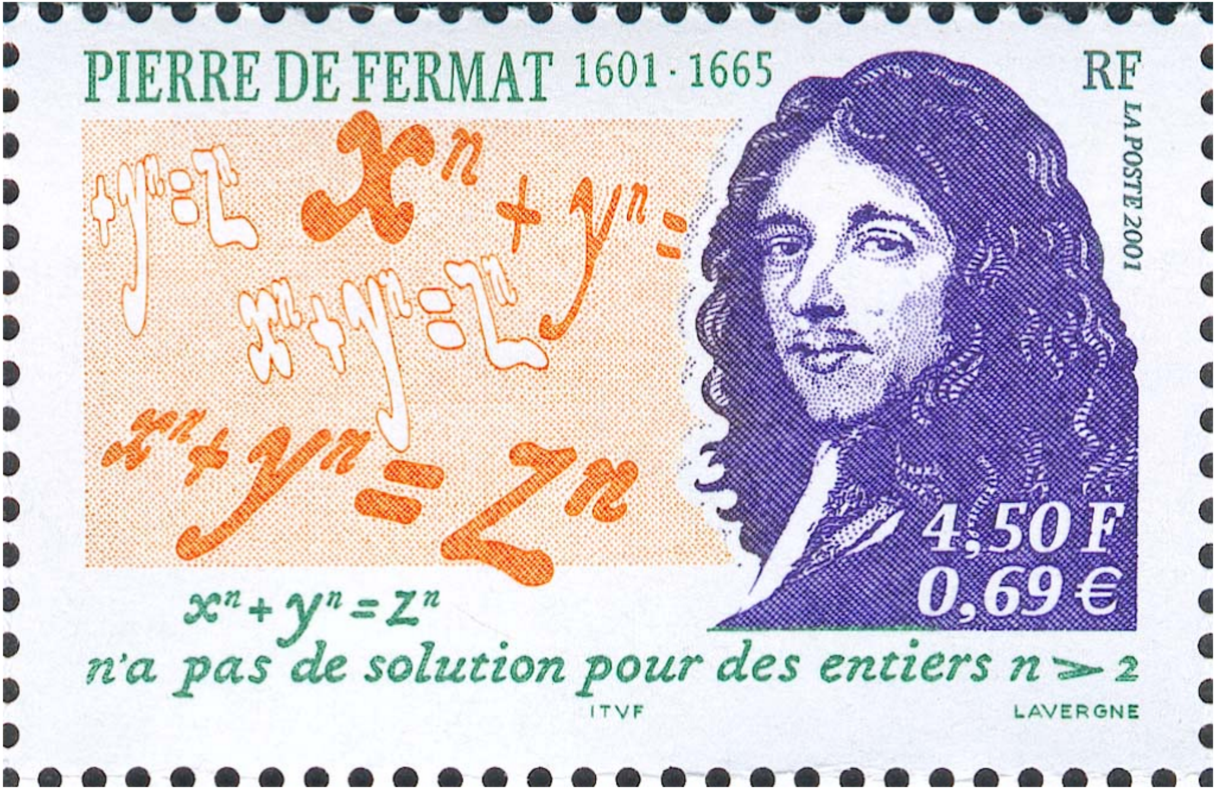
数学的帰納法の歴史

● 紀元1000年（平安時代）ごろアラビアの数学で帰納法によるとみなせる議論により初等数論の命題が証明されている．

● Francesco Maurolico による Arithmeticorum libri duo (1575 –天文（てんぶん）44年（安土桃山時代）) で帰納法による厳密な論証がなされている．

● フェルマー (Pierre de Fermat フランスの数学者 1601（文禄10年）—1665（寛文5年）) は現代的な帰納法による数論を展開している．

フェルマーの大定理　→
（予想）



フェルマーの予想は，1995年に，アンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles) によって肯定的に解決された．

フェルマーの予想（大定理）

$x^n+y^n = z^n$ n'a pas de solution pour des eintiers $n > 2$

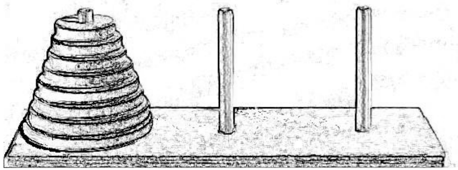
$x^n + y^n = z^n$ はすべての整数 $n > 2$ に対し（整数の範囲での）解を持たない.

フェルマーの予想は，1995年に，アンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles) によって肯定的に解決された.

数学的帰納法の用例の続き: ハノイの塔

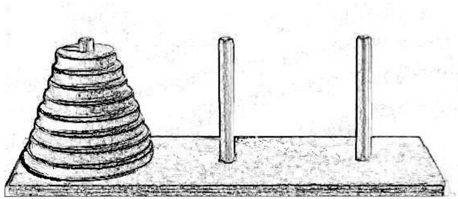
フランスの数学者ルカ (François Édouard Anatole Lucas, 1842（天保13年）–1891（明治24年）) の発明したパズル

最初に三本のポールが立った台座のうちの一本のポールに，ポールに通すためのための穴が中心に開いている，大きさの違う n 枚の円盤が，大きいほうから順につまれている（ハノイの塔）



8個の円盤を持つハノイの塔

次のルールに従ってハノイの塔を別のポールに移すことができるか



8個の円盤を持つハノイの塔

次のルールに従ってハノイの塔を別のポールに移すことができるか?

(1) 一度に移動できるのは一つの円盤で，あるポールに積まれた円盤のうちの一番上のものを他のポールのどちらかに移動することができる．

(2) 円盤の移動先のポールは，円盤が1つも積まれていないか，すでに積まれているのは移動する円盤より大きいサイズの円盤だけのときに限る．

定理 1 すべての自然数 $n \geq 1$ について，サイズが n のゲーム盤のハノイの塔を，(1)と(2)に従って別のポールに移動することができる．

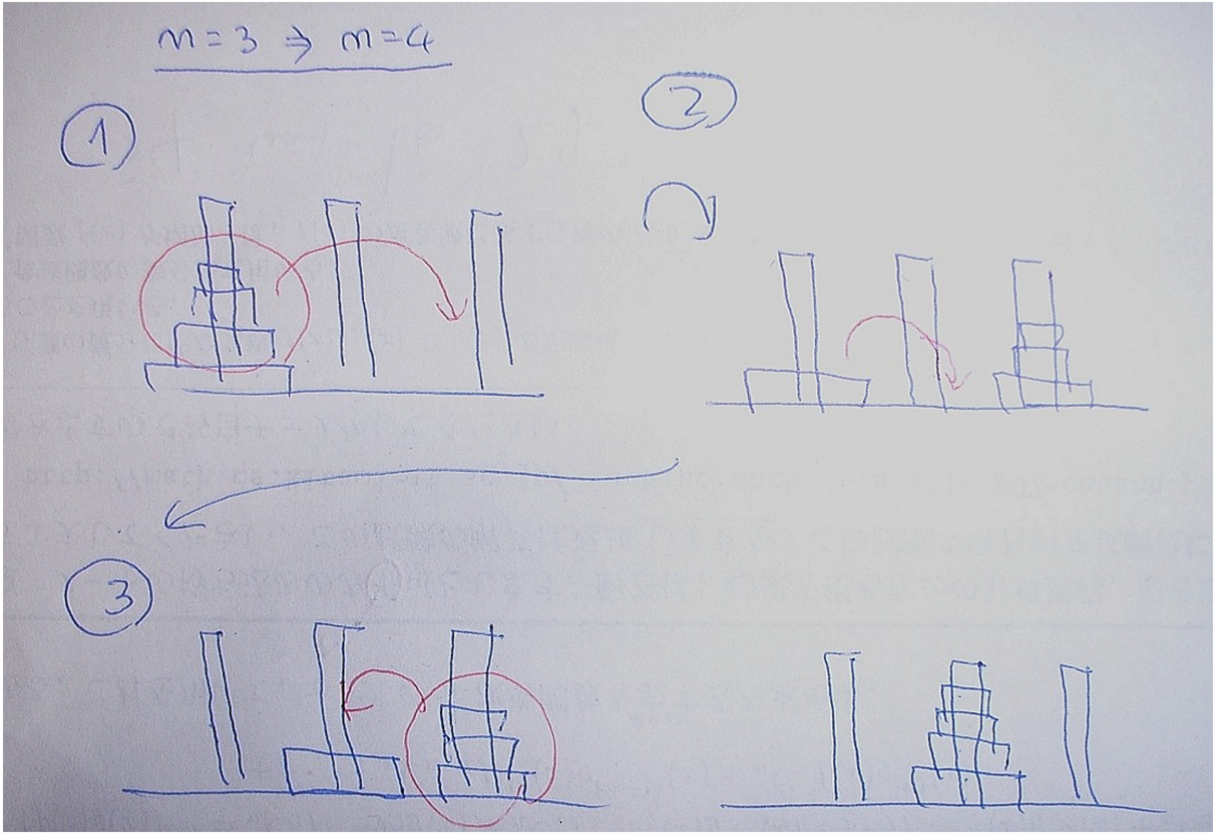
証明 n に関する帰納法で証明する． $n = 1$ のときには，主張が成り立つことは明らか．

したがって，ある自然数 $k \geq 1$ に対して定理の主張が $n = k$ としたときに成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ に対しても定理の主張が成り立つことが示せれば，帰納法による証明が完了する．

（証明の続き） サイズが $k+1$ のゲーム盤を考える．
ポールを左側から一番，二番，三番と呼ぶことにする．一番のポールに $k+1$ 個の円盤からなるハノイの塔が置かれているとする．

帰納法の仮定から，一番下の円盤以外の k 個の円盤からなるハノイの塔を，たとえば三番のポールに(1)と(2)に抵触せずに移動することができる．

ここで，一番下の円盤を一番のポールから二番のポールに移動した後，三番のポールに積まれている k 個の円盤を，ふたたび帰納法の仮定を用いて(1)と(2)に抵触しないように二番のポールの一番大きな円盤の上に積上げれば，全体として一番のポールから二番のポールへの $k+1$ 個の円盤の移動ができたことになる． ❑


m=3 ⇒ m=4
1
2
3

背理法(はいりほう)：

ある事柄 P を証明するために，P の否定を仮定すると矛盾が起きることをを示し，そのことから P を結論する．

背理法は帰謬法（きびゅうほう）ともよばれることもある．

背理法は，数学的帰納法とは異なり数学の歴史の中で非常に早くから使われていた論法である．

次ページの例は，ピタゴラス（または彼の弟子ヒッパソス）によるものとされていて，紀元前6世紀くらいに得られた証明である．

背理法による証明の例

定理 2 $\sqrt{2}$ は有理数でない.

証明. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定してみる.

すると $\cdots$

$\cdots$

$\cdots$ これは矛盾である.

したがって $\sqrt{2}$ は有理数でない. $\square$

定理 1（ピッパソス（?），紀元前6世紀ごろ） $\sqrt{2}$ は有理数でない．

証明. **$\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定してみる．** つまり，$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ となる整数 m, n が存在すると仮定する．

$\frac{m}{n}$ は既約分数表現（これ以上約分できない表現）になっているとしてよい.（そうでなければ $\frac{m}{n}$ を約分したもので置き換える.）

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ の両辺を二乗して移行すると，$2n^2 = m^2$ となる．このことから，m^2 は 2 で割切れることがわかるので，m も 2 で割切れる．したがって，$m = 2m'$ となる整数 m' がとれる．

$\sqrt{2} = \frac{2m'}{n}$ だから，この両辺を二乗して整理すると，$n^2 = 2m'^2$ となる．したがって，n は 2 で割切れることがわかる．したがって $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，$\frac{m}{n}$ を既約にとっていたことに**矛盾である．**

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数でない． □

月曜 7–8 時限のクラスは,

1月28日（月） 5–6 時限 957教室（この教室）で期末試験

を実施します．試験は持ち込み可で，前に配付した「予想問題」の内容の問題が出ます．講義関連の資料が,

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu`

に置いてあります．また

1月29日(火)は月曜補充日になっているので
5–6 時限に957教室（この教室）で最後の講義を行います.

結語

本講義では，数学に特有な考え方に関連するキーワードをいくつかひろって，それらについて考察した．

数学は現代の科学のいたるところで本質的に用いられる．このことは自然科学だけでなく，人文科学にもあてはまる — たとえば数理統計の応用やゲームの理論の応用など．

また，近代科学の諸分野の理論が整備されてゆくとき，数学は，理論体系のお手本となった（なっている）．

この意味でも，数学の方法論を概観してみることは，数学を専門としない人にとっても重要な意味を持ちうる．