

1. 研究開始当初の背景

本研究の開始に先立って、研究代表者は、集合論での反映原理 (stationary reflection と呼ばれる反映原理とその様々な一般化) の数学への応用の研究を行なってきた。2010 年代後半には、stationary logic と呼ばれる一階の述語論理を強めた論理でのレーベンハイム・スコーレム定理を反映原理の一般化して捉える、という視点での研究を、本研究での研究分担者の酒井拓史氏と当時研究代表者の博士課程学生だった André Ottenbreit Maschio Rodrigues 氏との共同研究で行なっていた。研究代表者は、この研究で、一般化されたレーベンハイム・スコーレム定理の更なる抽象化である Laver-generic 巨大基数の存在公理 (これは前出のように LgLCA あるいはこの複数形を LgLCAs と略すことにする) を提案した。個々の LgLCA は、そこでパラメタとして現れる、半順序集合のクラス (例えば semi-proper な半順序たちの全体) $\mathcal{P}$ と、対応する巨大基数の概念 (例えば超コンパクト, hyperhuge など) を固定することで、一つの公理として特定されるものだが、この $\mathcal{P}$ として σ -closed な半順序の存在, proper (または semi-proper) な半順序の全体, countable chain condition (c.c.c.) を満たす半順序の全体をとると、そのような $\mathcal{P}$ に対する LgLCAs ($\mathcal{P}$ -LgLCAs) は、それぞれ、(C) 連続体仮説 (Continuum Hypothesis: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, 以下 CH と略), (D) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, (E) 連続体 $2^{\aleph_0}$ は非常に大きなものになる、という 3 つのそれぞれを帰結することが分った。上で述べた半順序のクラスたちは、強制法の理論での自然な半順序 (stationary preserving な半順序) のパターンをほぼ網羅している、と言えるので、この結果は、「集合論の自然な拡張では、連続体の濃度は $\aleph_1, \aleph_2$, 非常に大きい、の 3 つのうちの一つになる」、という、従来経験則的に知られていた三分律の、一つの説明になっている、と看做することもできる。

これらの研究結果は、本研究の最初の段階で更に改良され、主に引用文献 [1] で発表されている。なお、反映原理としての LgLCAs は、以下で述べることになるような集合論の基礎付けに関する純粋／抽象集合論的な側面だけでなく、もっと日常的な数学の問題とも多くの接点を持つ公理である。次の例を挙げる。“超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA” の具体的な定義については、次節を参照。

定理 1. ([7] の Proposition 3 を参照) $\mathcal{P}$ を c.c.c. 半順序の全体からなるクラスとして、超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA を仮定する。このとき、すべての自由でない代数 A に対し、 A の連続体濃度未満の濃度を持つ部分代数 B で自由でないものが存在する。 $\square$

定理 2. ([7] の Proposition 4 を参照) $\mathcal{P}$ をコーエン半順序 (ある κ に対して、コーエン実数を κ 付加する有限の条件からなる半順序) たちの全体からなるクラスとして、超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA を仮定する。このとき、すべての距離付け可能でない指標 (character) が連続体濃度未満の位相空間に対し、連続体濃度未満の濃度の部分空間で、距離付け可能でないものが存在する。 $\square$

以下では、 $\kappa_{\text{refl}} := \max\{\aleph_2, 2^{\aleph_0}\}$ とする。“ $2^{\aleph_0}$ 未満” でなく “ κ_{refl} 未満” としているのは、主張を、(C) の CH の成り立つシナリオにも対応できるものにするためである。

定理 3. ([7] の Corollary 7 を参照) $\mathcal{P}$ を、すべての σ -closed な半順序を含む stationary preserved な半順序からなるクラスとする。超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA を仮定する。このとき、任意の coloring number が非可算な無限グラフに対し、その濃度が κ_{refl} 未満の部分グラフで coloring number が非可算になるものが存在する。 $\square$

2. 研究の目的

本研究の研究の目的は、LgLCAs の集合論の公理系を拡張する公理としてのステータスの評価を与える と解釈のできるような内容の、多様な結果を得ることであった。

特に、この公理群に属す公理たちと、今世紀に入ってから集中的に研究されるようになった、絶対性定理 (Absoluteness Theorems) や、Joel Hamkins や彼の研究グループによって今世紀になって導入された、極大性原理 (Maximality Principles), 復活公理 (Resurrection Axioms) といった (どれも複数形の名詞で表わされている命題群である)、集合論の宇宙 (universe) V が、この宇宙の拡張や部分宇宙の全体で生成する集合論的多元宇宙 (set-theoretic multiverse) の中で満たすべき性質の記述と考えられる原

理たちとの関係性の精査は、その具体的な目標の一つであった。後で述べるように、この目標は本研究期間中にはほぼ完全に達成されたと言ってよいように思える。

LgLCA の典型的なインスタンスは、半順序のクラス $\mathcal{P}$ として、semi-proper な半順序の全体をとり、対応する巨大基数の概念として超コンパクト性をとるものである。この形の LgLCA の主張 (超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA) は、次のようなものになる:

ある基数 κ が存在して、すべての基数 $\lambda > \kappa$ と $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ に対し、 $\mathbb{P}$ -name $\dot{\mathbb{Q}}$ で $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}$ となるものが存在して、すべての V 上の $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ で generic なフィルター $\mathbb{H}$ に対し、 $j, M \subseteq V[\mathbb{H}]$ で、 M は推移的な $V[\mathbb{H}]$ の内部モデルで、 $j: V \rightarrow M$ で、 j は κ を critical point として持つ初等埋め込みで、 $j(\kappa) > \lambda$, $|\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}| \leq j(\kappa)$ かつ、 $\mathbb{P}, \mathbb{H}, j''\lambda \in M$ となるものが存在する。

この定義はいささか煩雑に見えるかもしれないが、強制法の理論にある程度精通している人には、この公理が、Martin's Maximum (MM) のスタンダードなモデルの持つ性質を抽出したようなものになっていることが、直ちに見て取れるだろう。実際、LgLCA から $\kappa = \kappa_{\text{refl}}$ が導かれ、上でのような $\mathcal{P}$ に対しての LgLCA からは Martin's Maximum⁺⁺ (MM⁺⁺) も導かれる ([1])。しかし、 $\mathcal{P}$ を semi-proper な半順序の全体としたときにも、proper な半順序の全体としたときにも、超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA は、MM⁺⁺ からは導かれなことが、本研究で判明している。これは、MM⁺⁺ が、後でも議論することになる Continuum Coding Axiom (CCA) と呼ばれる公理と矛盾しないのに対し、超コンパクト性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA はそうでないことから導かれる ([6])。

上で、集合論の宇宙 V が集合論の多元宇宙で満たすべき性質の記述と考えられる原理、と呼んだもののうち、絶対性定理たち (定理といっても ZFC で証明できるわけではない) は、次のように規定される:

$\mathcal{P}$ を半順序からなるクラスとして、 κ を ($\aleph_1, \aleph_2, 2^{\aleph_0}$ などの) 基数の概念とし、 Γ を集合論の言語での論理式の範囲とすると、任意の $\varphi = \varphi(\bar{x}) \in \Gamma$ と、 $\bar{a} \in \mathcal{H}(\kappa)$ に対し、 $\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi(\bar{a})$ (が宇宙 V で成り立つ) なら、任意の $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ に対する V 強制拡大 $V[G]$ でも、同じ $\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi(\bar{a})$ が成り立つ。

我々の“住んでいる”数学的 (集合論) 宇宙は、集合論的多元宇宙の中で、(モデル理論での飽和モデルがそうであるような) ある種の飽和性を持つものになっているべきだ、というのは自然な考えだろう。ある命題が $\mathcal{H}(\kappa)$ で成り立つ ($\mathcal{H}(\kappa)$ は濃度が遺伝的に濃度 κ 未満の集合の全体を表わす)、というのは、その命題の成立/非成立の判定に必要な例や反例の存在や非存在が、 $\mathcal{H}(\kappa)$ で確立している、ということなので、そのことが V の妥当な強制拡大で確立できたときには、そこでの κ 対応する基数 κ' に対する $\mathcal{H}(\kappa')$ での、この命題の成立を決定する例や反例の存在や非存在の状況は、 V の飽和性から、 V にも反映されるはずだ/べきだ (should be reflected down to V)、というのは、自然な/そうであるべき状況だと考えてもおかしくないし、このことが $\mathcal{H}(\kappa)$ の要素をパラメタとして含む命題に対しても起る、というのも、自然な要請に思える。上で、集合論的多元宇宙で V が満たすべき性質、と言ったのは、そのような意味においてである。

極大性原理、復活公理についても、それらの主張の妥当性/正当性の同様な議論が可能なので、この背景から、これらの原理と LgLCAs とのポジティブな関連性が見出されたときには、それは LgLCAs の妥当性/正当性のポジティブな保証/確証でもある、という解釈が可能になると考えてよいであろう。実際に、後述するように、そのような状況を主張する定理たちが本研究で証明でき、この結果は LgLCAs に対する、十分にポジティブな保証/確証を与えると解釈できる種類のものでもあった。

3. 研究の方法

本研究は数学に属するものであり、その研究方法は、文献検索やその精査、研究の参加者や他の研究者との討論や議論、研究成果の学会発表などを除くと、引き籠もって考える、ということにつきる。

本研究の研究期間は、Covid-19 の世界的な感染の期間のスーパーセットになっていたため、この「引き籠もって考える」ことを後押ししてくれるような事情には事欠かなかったが、文献検索や研究の参加者どうしの議論については、必ずしも肯定的とは言えない影響も受けた。

研究代表者と共同研究者との研究討論は、一時ほとんどインターネット上の通信に限定された。このため、引用文献 [6] は、ほとんどネット上での会議での議論やノートのファイルのシェアのみによって完

成させた。これに対して、[5] も論文の執筆段階での討論はメール連絡によって行なったが、研究の発足自体は、研究代表者が Covid 感染の状況の隙間をぬって早稲田大に出張したときの、共著者／研究協力者の薄葉季路氏との、対面での二日にわたる討論が、その契機となっている。

文献検索については、Covid 以前からかなりの程度ネットに移行してはいたが、これは広い意味での fellow mathematicians との雑談の中で得る情報がきっかけになることが少なくないため、Covid の期間中には、そのような種類の文献の発見の機会がかなり制限されることになった。

Covid 感染期間中の国際的な研究集会や国外でのセミナーでの研究発表はすべて virtual なものになったが、これは逆にそうなったことで、本研究の報告では言及しなかったものも含め、国内外のセミナーでの研究発表や参加の回数が非常に増えた。この結果、本研究の研究成果の国際的な中間報告と言えるような機会は十二分に得られている。

研究の最後の期間には、Covid の終焉を迎え、対面での研究討論の機会が再び増え、後でも名前を挙げることになる Joan Bagaria 氏 (バルセロナ大)、Gunter Fuchs 氏 (ニューヨーク市立大)、Gabriel Goldberg 氏 (UC バークレイ) を日本に招待し、現在集合論研究の世界最大の拠点の一つになっているヴィーン工科大学に研究協力者で [6] の共著者の合浦岳彦氏や、本研究に続く研究での共著者となるべき人たちを訪ねたし、本研究に続く研究での共同研究を計画している Andrés Villaveces 氏 (コロンビア国立大) を神戸に招聘した。

4. 研究成果

(1) 本研究の大きな研究成果の一つは、大きな (つまり無矛盾性の強さの大きな) 巨大基数の概念に対する LgLCAs が、絶対性定理、極大性原理、復活公理のいずれについても、それらの、パラメタ $\mathcal{P}$ の自然な設定のそれぞれで、無矛盾性の知られているもののうちの極大なものを導くことが証明できたことである ([3], [4], [5], [6])。

特に、極大性原理では、Joan Bagaria の導入した $C^{(n)}$ -巨大基数のヴァリエーションである super $C^{(n)}$ -巨大基数の概念の hyperhuge 性への適用で得られる巨大基数に対する LgLCAs が、 Γ をすべての論理式とたときの極大性原理を導くことを示した。この LgLCAs は “hyperhuge 対する super- $C^{(\infty)}$ LgLCAs” と名付けられ無限個の公理からなる公理図式である ([4], [5])。一方、有限個の論理式で記述できるような LgLCA のどのヴァリエーションも、すべての論理式に対する極大原理を導かないことは、[3] で示されている。

特に、 $\mathcal{P}$ を stationary preserving な半順序の全体として、論理式の全体を Γ とし、パラメタ $\mathcal{H}(\kappa_{\text{refl}})$ (この記号法については第 1 節と第 2 節を参照) に対する極大性原理を弱めた、回帰公理 (Recurrence Axioms) と名付けられた公理のうち、このパラメタの組合せによるものは極大な強さをもつものの一つ、と解釈できるので (回帰公理が極大な強さを持つもう一つの組合せとして $\mathcal{P}$ をすべての半順序からなるクラスとするものも考えられる)、すべての半順序の全体に対する回帰公理と、すべての stationary preserving な半順序の全体 $\mathcal{P}$ に対しての、hyperhuge 性に対する super- $\mathcal{P}$ - $C^{(\infty)}$ LgLCAs (これは $\mathcal{P}$ に対する極大性原理を導く) の組ををここで考えている公理たちのうちで、集合論の公理系の拡張としての最終選択として選ぶ (Laver’s Maximum) ということの妥当性についての考察が、[4] で行なわれている。Laver’s Maximum では、MM やその拡張から導かれるすべての結果が定理となる (例えば (D) が成り立つ) だけでなく、極大性原理や回帰公理のために、集合強制法で成り立たつようにできる命題は、すべて V の grounds (集合強制法で、宇宙 V にそこから戻れるような内部モデルたち) のどれかで成り立っている。Laver’s Maximum はこの意味で、実質上ほとんどすべての独立性／無矛盾性の結果を集合論の宇宙 V に統合する、非常に強力な公理となる。一方、その無矛盾性の強さは 2-huge 基数の存在で押さえられる ([4],[5])。例えば、同じ “Maximum” が名称につく、最近大きな話題となっている集合論のトピックで Chicoín’s Maximum と呼ばれている連続体の基数不変量がすべて互いに異なる値になる集合論のモデルたちがある。Laver’s Maximum では、MM (あるいはもっと弱く Martin’s Axiom) が成り立つため、Chicoín’s Maximum は成立していないが、Chicoín’s Maximum が c.c.c. 半順序による強制拡大で実現できることから、極大性原理から、これが、 V での proper な半順序による強制で V に戻れるような grounds の多くで成り立つ状況であることが結論できる。

(2) 本研究の 2023 年度までの研究分担者だった酒井拓史との共同研究での LgLCAs の (ZFC の言語で

の) 一階の論理での定義可能性の検証 [2] がある。第 2 節で述べた LgLCA の定義を見ると分かるように、この定式化では強制拡大でのクラス個のクラス関数の存在が言及されているので、この形のままでは一階の論理で表現できないが、一般化されたエクステンダーの強制拡大版を考えることで、相当する内容を一階の論理で記述できることが確認された。

(3) LgLCAs と、前出の CCA, およびその帰結である Ground Axiom (GA) や Bedrock Axiom (BA) との関係の解明は、当初は予期していなかった本研究での大きな成果である。これは、本研究の研究協力者の一人の薄葉季路との共同研究 [5] による結果である。CCA は、すべての集合が、それぞれ一般連続体仮説の基数の区間での成立不成立のパターンによって、クラス回コードされていることを主張する公理である。GA は、宇宙 V が真の ground 持たないことを主張する公理で、これは CCA から容易に導かれる。BA は、ground のうち包含関係に関して極小のものが存在することを主張する公理で、このような ground は bedrock と呼ばれることからつけられた名称である。[5] では、これまでの例に出てきたような良い性質を持つ半順序のクラス $\mathcal{P}$ をとると、hyperhuge 性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCA から BA が従い、そこでの bedrock では、宇宙 V での κ_{refl} が hyperhuge 基数になることが示せた。hyperhuge 性に対する $\text{super-}C^{(\infty)}$ $\mathcal{P}$ -LgLCA についての同様の結果も得られている。これらの結果から hyperhuge 性に対する $\mathcal{P}$ -LgLCAs や hyperhuge 性に対する $\text{super-}C^{(\infty)}$ $\mathcal{P}$ -LgLCAs の無矛盾等価性が得られたことになる。これは MM や MM^{++} の無矛盾等価性が現在まだ未解決なことを思い起こすと、注目すべきことに思える。

(4) 2024 年末に神戸に滞在した Gabriel Goldberg 氏との研究討論で、(1) で述べたいくつかの結果での LgLCAs の仮定を hyperhuge 基数に対応するものから extendible 基数に対応するものに弱めることができることの可能性の指摘を受けた。このことの検証を [8] で行なった。

(5) 多くの重い結果が、間を置かず次々と得られたため、論文発表は多少後手に回ってしまっているが、当初の目標をはるかに超える、集合論や数学の基礎付けへの重要な貢献となる多くの成果を挙げられている、と言えると思う。本研究の成果を土台とする、我々の結果の Hugh Woodin, Gabriel Goldberg, Mateo Viale らによる最新の研究結果との関連性の更なる考察が、即次の課題として残されている。

〈引用文献〉

- [1] Sakaé Fuchino, André Ottenbreit Maschio Rodrigues, and Hiroshi Sakai, Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, I,II Archive for Mathematical Logic, Vol.60, 1-2, 3-4 (2021).
- [2] Sakaé Fuchino, and Hiroshi Sakai, The first-order definability of generic cardinals, submitted. <https://arxiv.org/abs/2106.14129>
- [3] Sakaé Fuchino, Maximality Principles and Resurrection Axioms in light of Laver-generic large cardinal, extended version of a report in RIMS Kôkyûroku No.2261 (2023), in preparation. <https://arxiv.org/abs/2309.01329>
- [4] Sakaé Fuchino, Reflection and Recurrence, to appear in: Festschrift in Honor of Johann A. Makowsky (Springer/Birghäuser), 2025 (Jul). <https://arxiv.org/abs/2410.20343>
- [5] Sakaé Fuchino, and Toshimichi Usuba, On Recurrence Axioms, accepted to Annals of Pure and Applied Logic. <https://arxiv.org/abs/2402.02693>
- [6] Sakaé Fuchino, Takehiko Gappo, and Francesco Parente, Generic Absoluteness Revisited, submitted. <https://arxiv.org/abs/2410.15384>
- [7] Sakaé Fuchino, Extendibility and Laver-generic large cardinals, slides used in the talks at The Algebra Seminar of TU Wien, and 2025 年春期関東集合論セミナー, (2025). <https://fuchino.ddo.jp/slides/wien-tsukuba2025-pf-pc.pdf>
- [8] Sakaé Fuchino, Extendible cardinals, and Laver-generic large cardinal axioms for extendibility, RIMS Kôkyûroku, No. 1235 (2025). <https://fuchino.ddo.jp/papers/RIMS2024-extendible-x.pdf>