群論入門

大学院副コース　情報の取得と解析

蒲谷　祐一

第４回（11 月 30 日）

（Web 公開用：レポート問題を除いてある）

前回

前回の内容：

- 剰余類分解の復習
- 正規部分群
- 準同型定理
- ルービックキューブの群
- word length

今回の予定：

先週までの内容と趣向が変わるが

空間の回転を表す群（直交群），四元数（quaternion）

を紹介.

12. 直交群（内積とノルムの復習）

$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ n 次元ベクトル空間

（$\mathbb{R}^n$ の元を $\mathbf{x}$ の様に表し，その i 番目の成分を x_i で表すことにする.）

$\mathbb{R}^n$ の内積を次で定義する：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\mathbb{R}^n$ のノルムを内積を使って次のように定義する：

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

三平方の定理より，$||\mathbf{x}||$ は原点 $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$ と $\mathbf{x}$ の間の距離と思える.

12. 直交群（行列の演算の復習）

行列 A の (i,j)-成分を a_{ij} と書くことにする．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

のようになる．省略して $A = (a_{ij})$ と表すことがある．

$l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して，行列の積 AB を

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{lk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{lk} b_{kn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定める．AB は $l \times n$ 行列である．

12. 直交群（行列の転置）

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，$n \times m$ 行列 $A^T = (a_{ji})$ を A の転置という．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

となる．

記法　ベクトルは列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ で表した方が便利なので，以後，列ベクトルで表す．ただ場所をとるので，転置の記号 T を使って

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

のように表すことにする．

12. 直交群（行列の転置）

転置の記号を使えば内積は

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

と表すことができる．

転置の基本的な性質

$$\begin{aligned} &(A^T)^T = A && (A : m \times n \text{ 行列}) \\ &(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T && (A_1, A_2 : m \times n \text{ 行列}) \\ &(AB)^T = B^T A^T && (A : l \times m \text{ 行列}, B : m \times n \text{ 行列}) \end{aligned}$$

12. 直交群（定義）

定義

$n \times n$ 行列 A が

$$A^T = A^{-1} \quad \text{つまり} \quad AA^T = A^T A = I_n$$

を満たすとき，A は直交行列であるという（I_n は単位行列）.

$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を直交行列とする．任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について

$$A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

$$||A\mathbf{x}|| = \sqrt{A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = ||\mathbf{x}||$$

つまり A は内積やノルムを保つ．さらに次が言える：

定理

$$\begin{array}{c} A \text{ は直交行列} \\ (A^T = A^{-1}) \end{array} \iff \begin{array}{c} A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \end{array} \iff ||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}|| \ (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

12. 直交群（定義）

定義

$$\mathrm{O}(n) = \{n \times n \text{ 直交行列 }\} = \{A : n \times n \text{ 行列} \mid A^T = A^{-1}\}$$

定義から A は逆行列を持つことに注意．（つまり A は正則行列．）

定理

$\mathrm{O}(n)$ は行列の掛け算を乗法として群になる．

Proof.

まず $A, B \in \mathrm{O}(n)$ に対して $AB \in \mathrm{O}(n)$ であることを確かめる．

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

より $AB \in \mathrm{O}(n)$ である．結合法則は行列の積の結合法則から，単位元は単位行列 I_n，逆元は逆行列で与えられることが示せる． □

12. 直交群（$\mathrm{SO}(n)$）

定理

$A \in \mathrm{O}(n)$ ならば $\det A = \pm 1$. （$\det A$ は A の行列式）

Proof.

$\det(XY) = \det X \det Y$ と $\det X^T = \det X$ に注意して

$$(\det A)^2 = \det A \det A = \det A^T \det A = \det(A^T A) = \det I_n = 1$$

よって $\det A = \pm 1$. □

定義

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$$

定理

$\mathrm{SO}(n)$ は $\mathrm{O}(n)$ の部分群である．（証明は簡単なので省略．）

12. 直交群（例：O(2)）

一番簡単な場合である O(2) を考える．$A \in \mathrm{O}(2)$ を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表す．行列式 $ad - bc$ が ± 1 であることに注意して，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$A^T = A^{-1}$ から

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad a = \pm d,\ b = \mp c \ \text{（複合同順）}$$

$ad - bc = \pm 1$ に代入して

$$\pm(d^2 + c^2) = \pm 1 \quad \text{つまり} \quad d^2 + c^2 = 1$$

よって $c = \sin\theta$, $d = \cos\theta$ とかける．$a = \pm d$ と $b = \mp c$ より

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

12. 直交群（例：O(2)）

$$A \in \mathrm{O}(2) \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ここで

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1, \quad \det\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = -1$$

より

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

と表される．つまり SO(2) の元は平面での回転を表す．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

複素数平面を考えれば点 $x + iy$ に $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛けるのと同じ：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

12. 直交群（例：SO(3)）

同様に SO(3) は 3 次元の回転を表すことがわかる．3 次元での回転は 2 次元での回転と異なり，一つのパラメータ θ で表す事はできない．

「オイラー角」と呼ばれる 3 つのパラメータ (θ, φ, ψ) を使って

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と書くこともできるが，

- 回転 $(\theta_1, \varphi_1, \psi_1)$ と $(\theta_2, \varphi_2, \psi_2)$ を繰り返し（合成）を表すのが面倒．
- 2 つの回転を連続的に補間することも難しい．

2 次元での回転は複素数を使って表すことができたが，3 次元での回転を表すのには四元数が便利．とくに上の 2 つの問題点を解決してくれる．

13. 四元数（複素数の復習）

i を $i^2 = -1$ となる数とする.

2 つの実数 a, b を用いて $a + bi$ と書ける数を複素数という.

例えば次のように足し算や掛け算が計算できる：

$$(1 + 2i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + (2 - 3)i = 3 - i$$
$$(1 + 2i) \cdot (1 - i) = 1 + 2i - i - 2i^2 = 1 + 2i - i + 2 = 3 + i$$

複素数 $z = x + yi$ を平面上の点 (x, y) とみなす（複素数平面）.

z に $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛ける事で，z を原点を中心に角度 θ だけ回転させることができる：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(x + yi) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

13. 四元数（複素数の復習）

複素数 $z = a + bi$ の共役 $\bar{z}$ を

$$\overline{a+bi} = a - bi$$

で定義する．さらに z の絶対値を

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

で定義する．三平方の定理から $|z|$ は原点 0 と点 z の距離に等しい．

$z = a + bi$ が $|z| = 1$ を満たすとき $a^2 + b^2 = 1$ よりある θ を用いて

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

と表すことができる．このとき

$$z^{-1} = \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

である．

13. 四元数（定義）

i, j, k を
$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1,\ ijk = -1$$
を満たす数とする．

$ijk = -1$ に右から k を掛ける事で
$$ijk^2 = -k \implies -ij = -k \implies ij = k$$
$ijk = -1$ に左から i を掛ける事で
$$i^2jk = -i \implies -jk = -i \implies jk = i$$
$jk = i$ から $ji = j(jk) = j^2k = -k$ となるので
$$ij = k = -(-k) = -ji.$$
ここで $ij \neq ji$ であることに注意．同様に次の等式が示せる：

$$\begin{array}{lll} ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ij = -ji, & jk = -kj, & ki = -ik \end{array}$$

13. 四元数（定義）

定義と，それから導かれる基本的な等式をまとめておく：

$$
\begin{array}{llll}
i^2 = -1, & j^2 = -1, & k^2 = -1, & ijk = -1, \\
ij = k, & jk = i, & ki = j, & \\
ij = -ji, & jk = -kj, & ki = -ik &
\end{array}
$$

定義

4 つの実数 a, b, c, d を用いて

$$q = a + bi + cj + dk$$

と書ける数を**四元数** (quaternion) という．a を q の**実部**という．

$ij \neq ji$ 等から，四元数 q_1, q_2 に対して $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ となり得る事に注意．

13. 四元数（共役）

定義

$q = a + bi + cj + dk$ の共役 $\bar{q}$ を

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

で定義する．（共役は q^* で表されることも多い．）

q と共役 $\bar{q}$ との積を考えると

$$\begin{aligned}
q\bar{q} =&(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\
=&a(a - bi - cj - dk) + bi(a - bi - cj - dk) \\
&+ cj(a - bi - cj - dk) + dk(a - bi - cj - dk) \\
=&(aa - abi - acj - adk) + (abi - b^2 i^2 - bcij - bdik) \\
&+ (acj - bcji - bcj^2 - bdjk) + (adk - bdki - cdkj - d^2 k^2) \\
=&(a^2 - abi - acj - adk) + (abi + b^2 - bck + bdj) \\
&+ (acj + bck + bc - bdi) + (adk - bdj + cdi + d^2) \\
=&a^2 + b^2 + c^2 + d^2
\end{aligned}$$

13. 四元数（共役）

定義

$q = a + bi + cj + dk$ の共役 $\bar{q}$ を

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

で定義する．（共役は q^* で表されることも多い．）

q と共役 $\bar{q}$ との積を考えると

$$\begin{aligned}
q\bar{q} =& (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\
=& a(a - bi - cj - dk) + bi(a - bi - cj - dk) \\
& + cj(a - bi - cj - dk) + dk(a - bi - cj - dk) \\
=& (aa - abi - acj - adk) + (abi - b^2 i^2 - bcij - bdik) \\
& + (acj - bcji - bcj^2 - bdjk) + (adk - bdki - cdkj - d^2 k^2) \\
=& (a^2 - abi - acj - adk) + (abi + b^2 - bck + bdj) \\
& + (acj + bck + c^2 - cdi) + (adk - bdj + cdi + d^2) \\
=& a^2 + b^2 + c^2 + d^2
\end{aligned}$$

13. 四元数（ノルム）

定義

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ に対し，絶対値（またはノルム） $|q|$ を

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

で定義する．

（複素数 $z = a + bi$ に対して $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であったことに注意．）

定義と基本的な性質のまとめ

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ に対して

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk, \qquad \bar{\bar{q}} = q, \qquad q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \qquad |q| = 0 \Longleftrightarrow q = 0.$$

四元数 q_1, q_2 に対して

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\ \overline{q_1}, \quad |q_1 q_2| = |q_1||q_2|$$

（$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_1}\ \overline{q_2}$ ではないことに注意．）

13. 四元数（3 次元空間の表現）

実部が 0 である四元数

$$p = xi + yj + zk \quad (= 0 + xi + yj + zk)$$

を用いて 3 次元空間の点 (x, y, z) を表すことにする．

実部が 0 である四元数は $\bar{p} = -p$ を満たす四元数と特徴付けられる：

$$\bar{p} = -xi - yj - zk = -(xi + yj + zk) = -p$$

$$\{p : \text{四元数} \mid \bar{p} = -p\} \xleftrightarrow{\text{同一視}} \mathbb{R}^3 : \text{3 次元ベクトル空間}$$

また

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

だから，この同一視の下，$|p|$ は 3 次元ベクトルのノルム $||(x, y, z)^T||$ に等しい．

13. 四元数（3 次元空間の回転）

観察

四元数 q が $|q| = 1$ を満たすとき

$$q\bar{q} = \bar{q}q = 1$$

であるから，$q^{-1} = \bar{q}$ と思える．

（複素数 z に対して $|z| = 1$ のとき $z^{-1} = \bar{z}$ であったことに注意．）

定理

q を $|q| = 1$ となる四元数とする．$p = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$ に対して写像

$$\varphi_q(p) = qp\bar{q}$$

は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像で，$\varphi_q \in \mathrm{SO}(3)$ である．

（全ての $\mathrm{SO}(3)$ の元は φ_q の形で表すことができる事も示せる．）

13. 四元数（3 次元空間の回転）

q を $|q| = 1$ となる四元数とする．$p = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$ に対して写像

$$\varphi_q(p) = qp\bar{q}$$

は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像で，$\varphi_q \in SO(3)$ である．

Proof.

$$\overline{\varphi_q(p)} = \overline{qp\bar{q}} = \bar{\bar{q}}\bar{p}\bar{q} = -(qp\bar{q}) = -\varphi_q(p)$$

より $\varphi_q(p)$ は $\mathbb{R}^3 = \{p \mid \bar{p} = -p\}$ の元である．
実数 a, b と $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ について

$$\varphi_q(ap_1 + bp_2) = q(ap_1 + bp_2)\bar{q} = a(qp_1\bar{q}) + b(qp_2\bar{q}) = a\varphi_q(p_1) + b\varphi_q(p_2)$$

だから φ_q は線形写像である．さらに

$$|\varphi_q(p)| = |qp\bar{q}| = |q||p||\bar{q}| = 1 \cdot |p| \cdot 1 = |p|$$

だから φ_q はノルムを保つので直交行列である．
（$\det \varphi_q = 1$ の証明は省略．） $\square$

13. 四元数（3 次元空間の表現）

定理

q を $|q| = 1$ となる四元数とする．$p = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$ に対して写像

$$\varphi_q(p) = qp\bar{q}$$

は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像で，$\varphi_q \in SO(3)$ である．

$q = a + bi + cj + dk$ のとき，φ_q を 3×3 行列として具体的に表すと

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．

定理

集合 $\{q : \text{四元数} \mid |q| = 1\}$ は掛け算を乗法として群になる．写像 $q \mapsto \varphi_q$ は $\{q : \text{四元数} \mid |q| = 1\}$ から $SO(3)$ への準同型である．

13. 四元数（3 次元空間の表現）

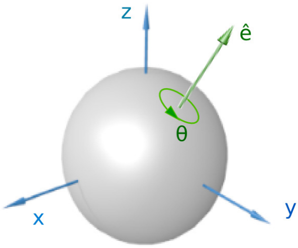
$q = a + bi + cj + dk$ のとき，$|q| = 1$ は $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ と同値である．$a = \cos\frac{\theta}{2}$, $\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = \sin\frac{\theta}{2}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ と置けば，

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_x i + u_y j + u_z k)$$

と表すことができる．ここで $u = u_x i + u_y j + u_z k \in \mathbb{R}^3$ は

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

となる $\mathbb{R}^3$ の元である．u は単位球面上のベクトルと思えるが，φ_q は u を軸とする，角度 θ 回転であることが示せる．



Wikipedia より

13. 四元数（2 つ回転の補間）

四元数の足し算や掛け算を使うことで，自由に回転を作り出せる．

四元数 q_1，q_2 （$|q_1| = |q_2| = 1$）に対して，

$$q(t) = \frac{(1-t)q_1 + tq_2}{|(1-t)q_1 + tq_2|} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

は $|q(t)| = 1$ だから回転を表す．$q(0) = q_1$，$q(1) = q_2$ だから $q(t)$ は q_1 と q_2 を補間する回転である．

（上式で，かなり特別な場合を除けば $|(1-t)q_1 + tq_2| \neq 0$ であるので，割り算はできる．）

（もっと自然な補間方法もあるが省略．検索して調べてみよう．）