

一般化された DS diagram について

河野正晴 (北見工業大学)

「箱根セミナー記録 99」の私の文章の表題は「拡張版 DS diagram について」でしたが、「拡張された」という言葉は横山さんが使う事になりましたので、私は「一般化された」という用語を使用する事にします。2つの定義は少し違うので「拡張版」の方は横山さんの論文を参考して下さい。拡張版 DS diagram およびラベル付グラフの定義は横山さんのもの(「箱根セミナー記録」掲載予定)を参照して下さい。私がラベル付グラフと呼んでいたものは1-ラベル付グラフという呼び名に変更したいと思います。

この draft は「箱根セミナー記録 99」で書いた結果の改善版です。TeX file は使い回しているのと同じ様に見えるかもしれませんが結論は前進しました。前進した結論は「3つの type の例外を除き、一般化された DS diagram が表わす多様体はラベル付きグラフから決まる」というものです。

1 定義と結果

この節では一般化された DS diagram の定義と結果について述べる。グラフの連結性をはずしたのでグラフがのっている曲面も連結でなくてよいことにする。

fake surface P に対し 3rd singularity の集合を $V(P)$, 2nd singularity の集合を $E(P)$, 1st singularity の集合を $F(P)$ と書く。graph G に対し vertex の集合を $V(G)$, edge の集合を $E(G)$ と書く。ここでグラフは位相空間と考えている。またグラフといったら vertex を含まない loop (津久井さんに従ってこれを hoop と呼ぶ) も許すことにする。

定義 1 $\Sigma = (S, G, f)$ が一般化された DS diagram (generalized DS diagram) (略して GS と書く) であるとは以下の条件をみたす事とする: $S = \bigcup_{i=1}^p S_i^2$ は有限個の 2 球面の集まり, G は S 上の 3-regular なグラフで, f は S からある closed fake surface P への onto な local homeomorphism で次を満たす。

- (1) $f|_{V(G)}: V(G) \rightarrow V(P)$ は pointwise に 4 対 1
- (2) $f|_{E(G)}: E(G) \rightarrow E(P)$ は pointwise に 3 対 1

(3) $f|_{S-G} : S - G \rightarrow F(P)$ は pointwise に 2 対 1

$B = \bigcup_{i=1}^p B_i^3$ を有限個の 3 球体で, $\partial B_i^3 = S_i^2 (i = 1, \dots, p)$ 即ち $\partial B = S$ と考えたとき, B/f を $M(\Sigma)$ と書く。DS diagram のときと同じ様に $M(\Sigma)$ は 3 次元多様体になる。これを Σ によって表現される多様体と呼ぶ。 $M(\Sigma)$ が向き付け可能のとき, 向き付けられていて, B にはそれと同調する向きが入っているとす。

定義 2 $L = (S, G, g)$ がラベル付きグラフ (labeled graph) であるとは以下の条件を満たす事とする: S, G は定義 1 と同じとする。 g は $U(G)$ (G の S^2 における正則近傍) から fake surface T_g への onto な local homeomorphism で次を満たすものとする。

- (1) $g|_{V(G)} : V(G) \rightarrow V(T_g)$ は pointwise に 4 対 1
- (2) $g|_{E(G)} : E(G) \rightarrow E(T_g)$ は pointwise に 3 対 1
- (3) $g|_{U(G)-G} : U(G) - G \rightarrow F(T_g)$ は pointwise に 2 対 1

GS $\Sigma = (S, G, f)$ に対し適当な近傍 $U(G)$ を選ぶと (例えば $f^{-1}(U(f(G)))$ を選ぶと), $g = f|_{U(G)}$ に対し, $L = (S, G, g)$ はラベル付きグラフになる。このラベル付きグラフを $L(\Sigma)$ と書く。

定義 3 $L_1 = (S, G, h)$ が 1-ラベル付きグラフ (1-labeled graph) であるとは以下の条件を満たす事とする: S, G は定義 1 と同じとする。 G_h をある (4-regular) graph, h を G から G_h への onto な local homeomorphism で

- (1) $h|_{V(G)} : V(G) \rightarrow V(G_h)$ は pointwise に 4 対 1
- (2) $h|_{E(G)} : E(G) \rightarrow E(G_h)$ は pointwise に 3 対 1

GS $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $h = f|_G$ とおくと, $L_1 = (S, G, h)$ は 1-ラベル付きグラフになる。この 1-ラベル付きグラフを $L_1(\Sigma)$ と書く。またラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$ に対し $h = g|_G$ とおくと, $L_1 = (S, G, h)$ は 1-ラベル付きグラフになる。この 1-ラベル付きグラフを $L_1(L)$ と書く。

この定義では 1-ラベル付きグラフという感じがしないかもしれないので, 次の様に G の edge に向き付き 1-ラベルがついていると考えてもよい。 $E(G_h)$ の向き付けられた edge C (hoop の場合もあり) に対し, $g^{-1}(C)$ が 3 つの component のとき, それぞれに向き付き 1-ラベル C を local な同相写像が定義する同調する向きに付ける (図 1 参照。edge C が open arc のときはこの場合しか起きない, ここで \bar{C} が loop のときを含む)。 $g^{-1}(C)$ が 2 つの component からなるときはそれ上で g が 2 対 1 になっている成分に $2C$ (この type の 1-ラベルを 2 重型と呼ぶ), 1 対

1になっている成分に C の 1-ラベルを付ける (ただし 1-ラベル付きグラフが GS から定まっている場合、これはおきない; 補題 7 参照)。 $g^{-1}(C)$ が connected のときは 1-ラベル $3C$ を付ける (図 1 参照)。この type の 1-ラベルを 3 重型と呼ぶ。

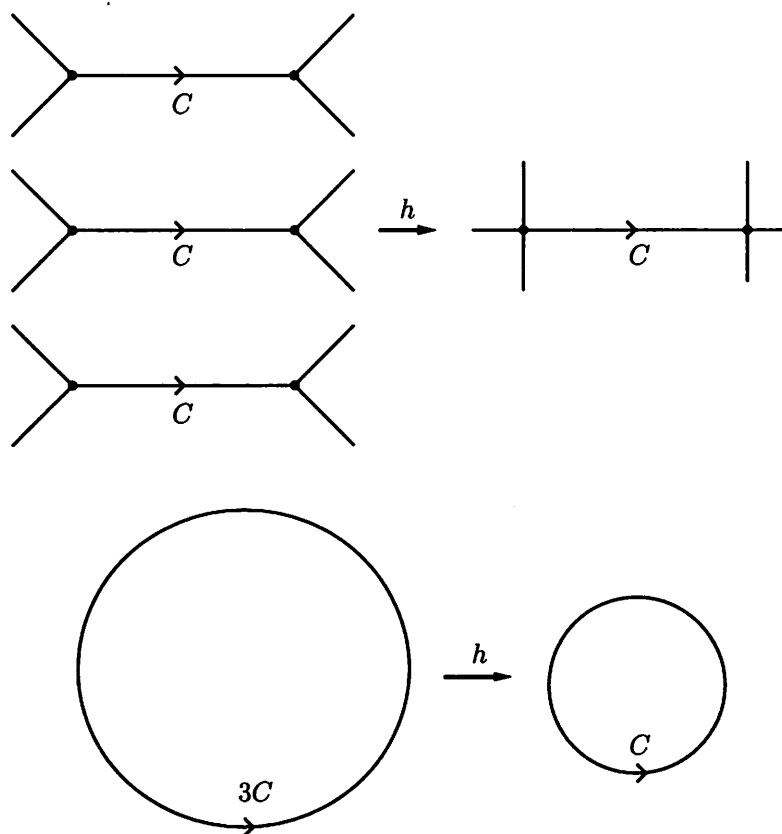


図 1

次に GS, ラベル付きグラフ, 1-ラベル付きグラフの同値を定義しよう。

定義 4 2つの GS $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S', G', f')$ が同値であるとは S から S' への homeomorphism F と P から P' への homeomorphism H が存在して $f' \circ F = H \circ f$ を満たす事とする。このとき $\Sigma \equiv \Sigma'$ と書く。

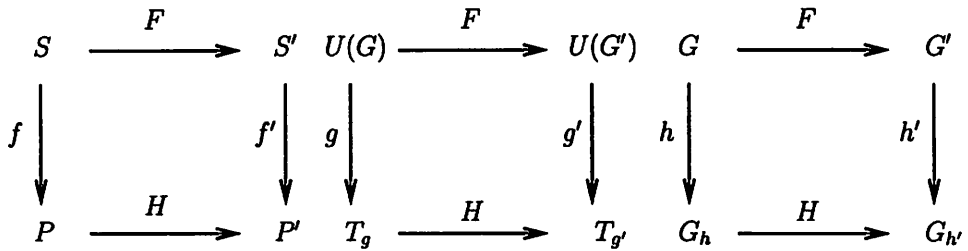


図 2

またラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$, $L' = (S', G', g')$ が同値であるとは S から S' への homeomorphism F と T_g から $T_{g'}$ への homeomorphism H が存在して $g' \circ F|_{U(G)} = H \circ g$ を満たす事とする。このとき $L \equiv L'$ と書く。GS Σ に対し $L(\Sigma)$ は同値の範囲で一意的に決まる。また $\Sigma \equiv \Sigma'$ のとき, $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ である。

1-ラベル付きグラフ $L_1 = (S, G, g)$, $L'_1 = (S', G', g')$ が同値であるとは S から S' への homeomorphism F と G_h から $G_{h'}$ への homeomorphism H が存在して $h' \circ F|_G = H \circ h$ を満たす。事とする。このとき $L_1 \equiv L'_1$ と書く。 $L \equiv L'$ のとき $L_1(L) \equiv L_1(L')$ である。

DS diagram の場合, それらから決まる 1-ラベル付きグラフが同値のとき, DS diagram としても同値になっている。GS ではこの事実は成立しない。しかし多くの場合 1-ラベル付きグラフが同値なら, GS が表現する多様体は同相になる。即ち次が成立する。

定理 2つの GS $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S', G', f')$ が同じ 1-ラベル付きグラフを決めるとき, つまり $L_1(\Sigma) \equiv L_1(\Sigma')$ となるとき, $L_1(\Sigma)$ が次の ㉠ ㉡ ㉢ の 3つの type を持たなければ $M(\Sigma)$ と $M(\Sigma')$ は同相, つまり $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ である。

系 prime な多様体に関しては一般化された DS が定める 1-ラベル付きグラフが同じなら多様体は同相である。

1-ラベル付きグラフが多様体を一意的に決めない例外となる 3つの type ㉠, ㉡, ㉢ は以下の通りである。

Ⓐ

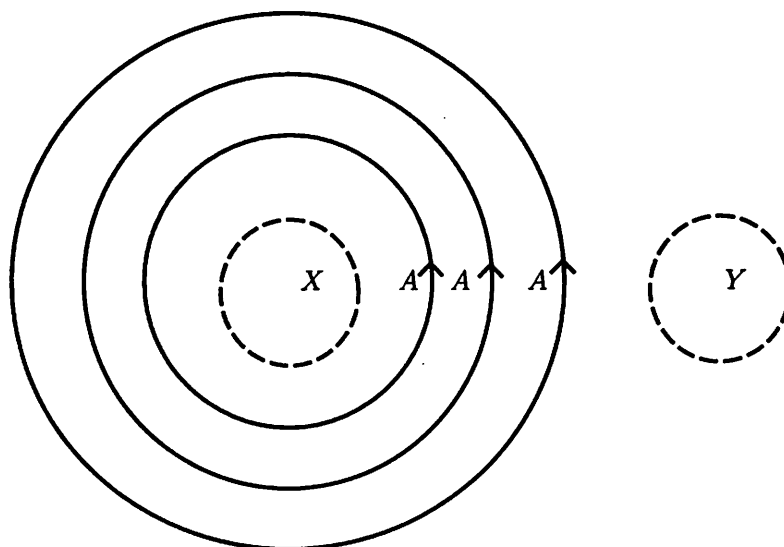


図 3

X, Y は empty も含めた何らかの subgraph を表わす。

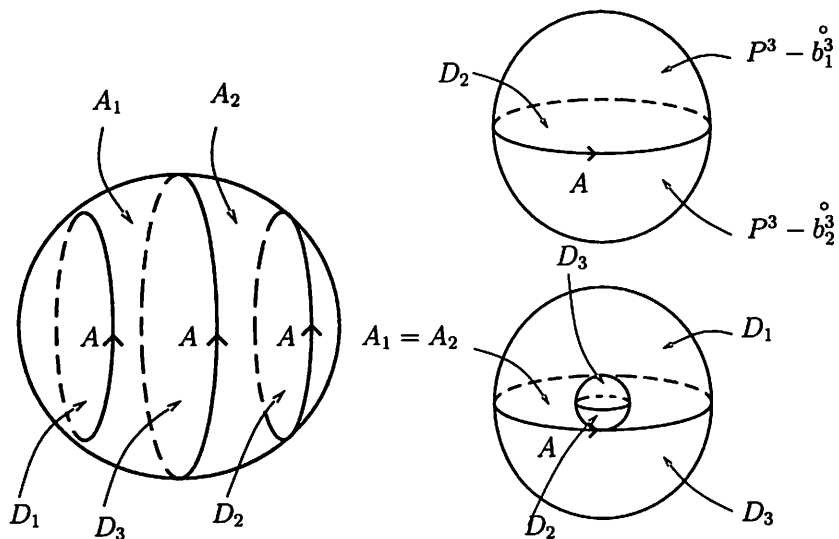


図 4

1-ラベル A を持つ 3 つの edge を境界に持つ B の proper な 2-disk を D_1, D_2, D_3 とする (図 4 左図参照)。3 つの 2-disk で cut してできる 3-ball で, annulus A_i を境

界に持つものを B_i とする ($i = 1, 2$)。annulus A_i が自分自身と identify されるとき $B_i/f \cong P^3 - \overset{\circ}{b}_i^3$, $\partial(B_i/f) = D_i \cup D_2$ なので $(B_1 \cup B_2)/f \cong (P^2 - \overset{\circ}{b}_1^3) \natural (P^2 - \overset{\circ}{b}_2^3) \cong P^2 \natural P^3 - \overset{\circ}{b}_3^3$ (図4右上図参照), ここで \natural は境界連結和で $\overset{\circ}{b}_i^3$ はある 3-ball。 A_1 と A_2 が identify されるときは図4右下図のようになっているので $(B_1 \cup B_2)/f \cong S^2 \times S^1 - \overset{\circ}{B}_1^3$ である。

よって図3の真中の2つの annulus の境界の1-ラベルは共に A で, 2つの annulus が自分自身と張り合わせられる場合は $M(\Sigma) = M_1 \natural P^3 \natural P^3$ となる。一方が他の annulus と張り合わせられる場合は $M(\Sigma) = M_1 \natural (S^2 \times S^1)$ となる。

ⓑ

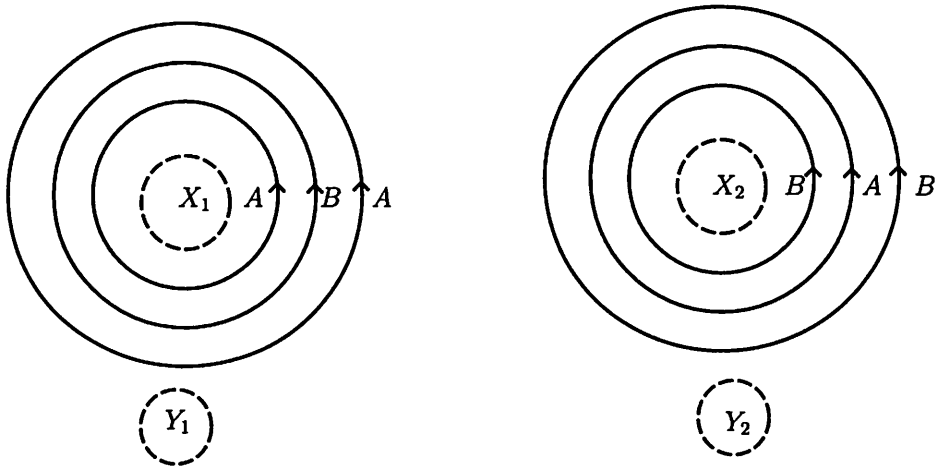


図5

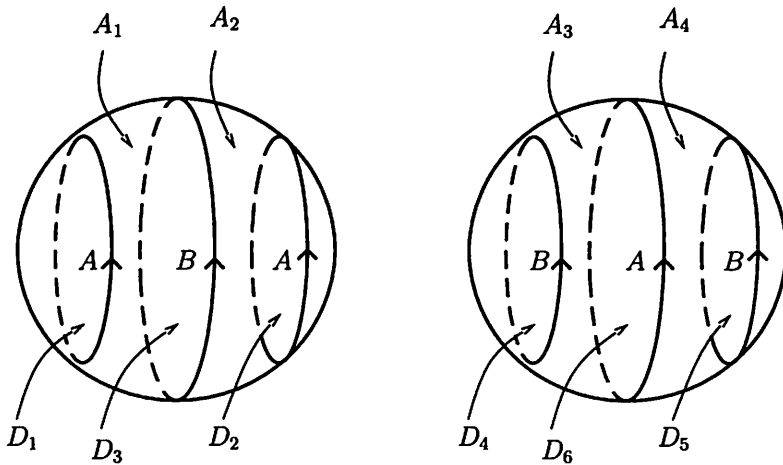


図6

図5の右図と左図は同じ S^2_i 上にある場合もあるし、そうでない場合もある。同じ S^2_i 上にあるときは一方の annulus 達の向きがすべて逆の場合もある。いずれの場合も境界の1-ラベルとして A と B をもつ annulus は自分と隣り合わない annulus に張り合わされる。

図6の様に2-disk を D_1, \dots, D_6 , annulus A_1, \dots, A_4 とする。 B を D_1, \dots, D_6 で cut して, A_1, \dots, A_4 で張り合わせたものを考えると図7の様になっている。ただし左が $A_1 = A_3, A_2 = A_4$ の場合, 右が $A_1 = A_4, A_2 = A_3$ の場合である。

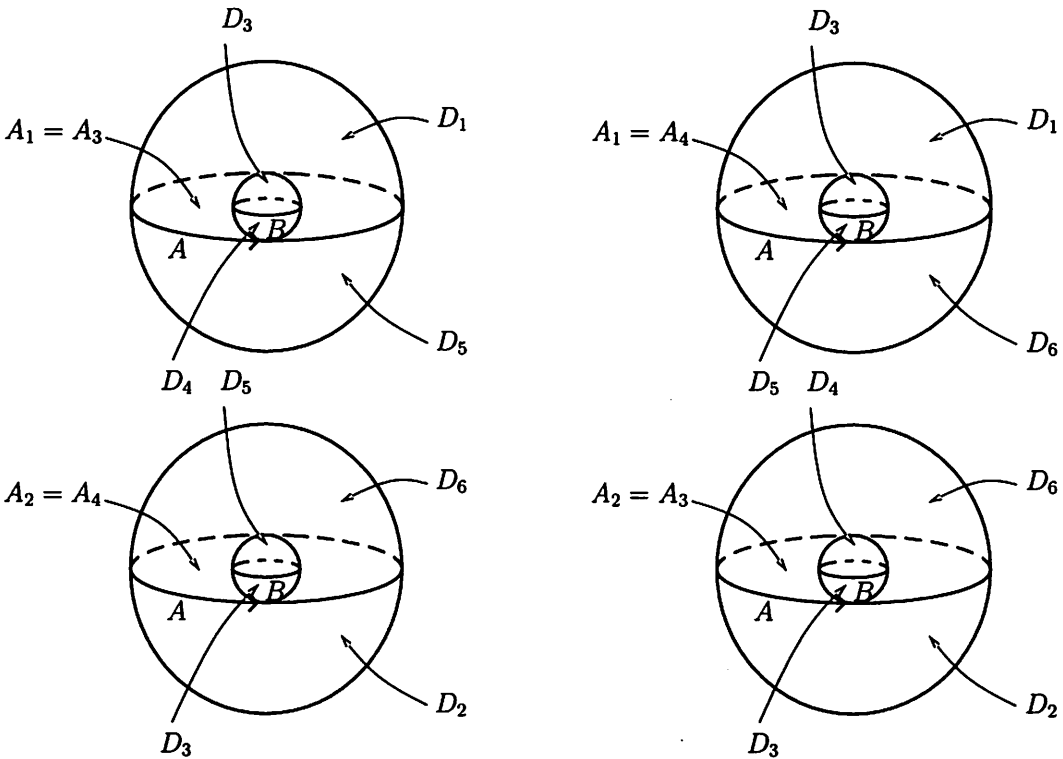


図 7

これを D_6 で張り合わせたのが図8である。これより多様体はいずれの場合も $S^2 \times S^1 - (b_1^3 \cup b_2^3)$ である事が分かる。しかし $D_1 \cup D_2$ が $M(\Sigma)$ 内の non-separating 2-sphere の場合 D_1 から D_4 (D_5 でもよい) に向かう arc の regular neighborhood を考えると, その向きは右図と左図で逆になっている。

図5左図で1-ラベル A の付いた一番内側のループを X_1 の方向へ少し動かしたループを l_1 とする。ループ l_2 を $f(l_1) = f(l_2)$ となる様にとる (左図の1-ラベル A の付いた一番外側のループを Y_1 の方向へ少し動かしたループ)。 $B = \bigcup_{i=1}^p B_i^3$ で proper な 2-disk を D_1, D_2 を $\partial D_1 = l_1, \partial D_2 = l_2$) となる様にとる。このとき $f(D_1 \cup D_2)$

は 2-sphere であるが, これが separating のときは多様体は identification によらず一意的で $M(\Sigma) = (S^2 \times S^1) \# N_1 \# N_2$ という形に書ける。そうでないとき一方は $M(\Sigma) = M_1 \# (S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$, 他方は $M(\Sigma) = M_1 \# (S^2 \times S^1) \# (S^2_\tau \times S^1)$ となる。ただし, $S^2_\tau \times S^1$ は S^1 上の twisted S^2 -bundle。

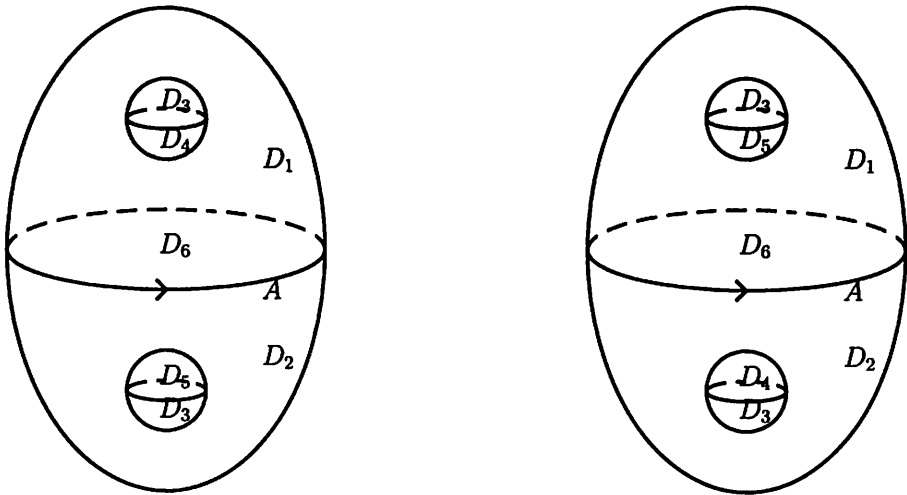


図 8

◎

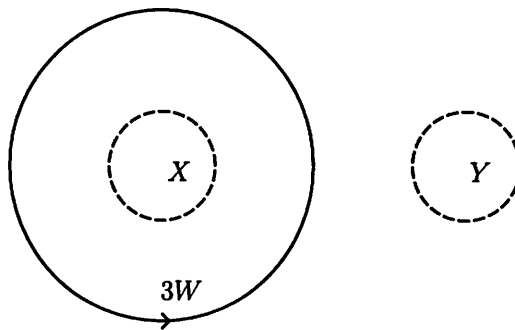


図 9

同一視の仕方により $M_1 \# L(3, 1)$ または $M_1 \# L(3, 2)$ になる。 M_1 が orientable で self orientation reversing homeomorphism を持たないときは $M_1 \# L(3, 1) \not\cong M_1 \# L(3, 2)$ である。

定理を示すためには次の2つの命題を示せばよい。

命題 5 2つの GS $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S', G', f')$ が同じ1-ラベル付きグラフを決めるとき、つまり $L_1(\Sigma) \equiv L_1(\Sigma')$ となるとき、 $L_1(\Sigma)$ が **A** **B** **C** の3つの type を持たなければ $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ である。

命題 6 2つの GS $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S', G', f')$ が同じラベル付きグラフを決めるとき、つまり $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ となるとき、 $M(\Sigma)$ と $M(\Sigma')$ は同相、つまり $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ である。

2 命題5の証明

この節ではいくつかの補題を証明しながら命題5を証明する。以下同値な GS, ラベル付きグラフ, 1-ラベル付きグラフを考えるときは、同値を与える F で引き戻して考えることにより $S = S'$, $G = G'$ かつ identity が2つの同値を与えていると仮定する。

補題 7 GS $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $L_1(\Sigma)$ は2重型の1-ラベルを持たない。

証明 1-ラベル $2C$ をもつ edge はその両側が f により identify されざるを得ない。このとき残りの1-ラベル C を持つ edge はその両側で f により identify されるので、これは f が local homeomorphism であることに反する。■

次の2つの補題は DS diagram のときと同様に成り立つ。

補題 8 GS においても次図10の様な1-ラベル付けは存在しない。

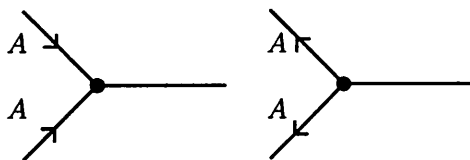


図 10

補題 9 GS においても identify される vertex のまわりの1-ラベルは適当に向きを取り直すと図11の様になっている。ここで $A = B^{-1}$ 等は許されているとする。

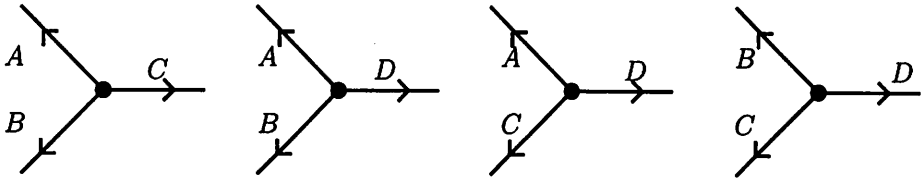


図 11

証明 GS の identification は local homeomorphism なので、補題 8 の様な 1-ラベル付けは存在しない。また同様に local homeomorphism と同一の 1-ラベルをもつ edge は 3 個ということから図 11 の様になっていることが分かる。■

ここで singular block bundle ([1] 参照) の定義をグラフ G 上のものに関して復習しておく。 $G = \bigcup_{v \in V(G)} \{v\} \cup \bigcup_{e \in E(G)} e$ としたとき、 $U(G)$ における G 上のプロックバンドル構造とは $U(G) = \bigcup_{v \in V(G)} B(v) \cup \bigcup_{e \in E(G)} B(e)$ の事である。ここで Y_k を k 個の閉区間 $I_j = [0, 1]$ ($j = 1, \dots, k$) を 0 で張り付けて得られる complex するとき、 $B(v) = \{v\} \times Y_3$, $B(e) = e \times Y_2$ とする。

$B_j(e) = e \times I_j$, $B_j(v) = e \times I_j$ とする。この様な $B_j(e)$, $B_j(v)$ を subblock と呼ぶ。 $\partial e = \{v_1, v_2\}$ のとき、各 j に対しある i_1, i_2 が存在して $\overline{B_j(e)} = B_j(e) \cup B_{i_1}(v_1) \cup B_{i_2}(v_2)$ であり、 $\partial e = \{v_1\}$ のときは各 j に対しある i_1 または i_1, i_2 が存在して $\overline{B_j(e)} = B_j(e) \cup B_{i_1}(v_1)$ または $\overline{B_j(e)} = B_j(e) \cup B_{i_1}(v_1) \cup B_{i_2}(v_1)$ を満たしている (図 12 参照)。

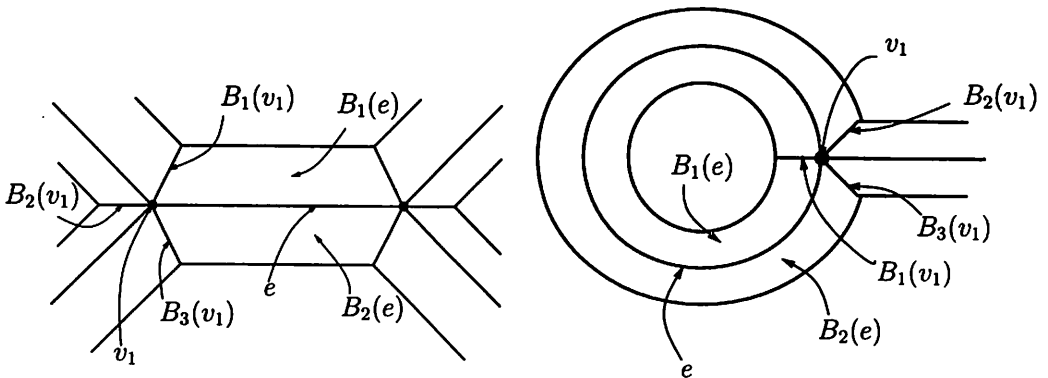


図 12

$f(G) = \bigcup_{v' \in V(P)} \{v'\} \cup \bigcup_{e' \in E(P)} e'$ の P における近傍 $U(f(G))$ に singular block bundle の構造を入れ固定しておく。即ち $U(f(G)) = \bigcup_{v' \in V(P)} B(v') \cup \bigcup_{e' \in E(P)} B(e)$ を考える。ここで $B(v') = \{v'\} \times Y_4$, $B(e') = e' \times Y_3$ である。

ただし3重型の edge が存在すると、このままでは singular block bundle にはならない。ここでこの block 構造を少し変えた singular block bundle を考える： e が3重型のとき、 $f(e) = e'$ とする。 e' 上に点 v' をとり $e'_1 = e' - \{v'\}$ とおく。 v' を vertical な頂点と考え (G の頂点ではないが、block 構造では頂点と考える)、次のようにブロックをとる。 $B(e'_1) = e'_1 \times Y_3$, $B(v') = \{v'\} \times Y_3$ とし、 $B(e')$ の代わりに $B(e'_1) \cup B(v')$ をとる。

このときこの各 $B_j(e')$ を f で引き戻すことにより、 $U(G)$ のブロックバンドルで、 f を subblock に制限したとき、 $f|_{B_j(e)} : B_j(e) \rightarrow B_j(e')$ が $f(x, t) = (f(x), t)$ を満たす様なものを構成できる。以下グラフ G の regular neighborhood $U(G)$ を1つ固定し、またこの様な singular block bundle 構造を1つ固定して考える。

もう1つの GS $\Sigma' = (S, G, f')$ が与えられると、 f' を GS の同値の範囲で更に取り換えて、与えられた singular block bundle の構造を保ち、上の条件を満足するようにできる。以下出てくる f, f' などの identification map はこの条件を満たしているものと仮定する。

GS $\Sigma = (S, G, f)$ が与えられると、 $S - G$ 上の fixed point free involution (以下簡単に free involution と呼ぶ) を次の様に定義することができる： $p \in S - G$ に対し $f^{-1}f(p) = \{p, p'\}$ とするとき、 $\tau(p) = p'$ とする。この Σ から決まる involution を $S - \overset{\circ}{U}(G)$ 上で考えたものを $\tau(\Sigma)$ という記号で表わす。 f が $S - G$ で2対1の local homeomorphism なので、 τ は homeomorphism である。

1-ラベル付きグラフ (S, G, h) が与えられると $U(G)$ の singular block bundle の構造から $\partial U(G)$ が1-ラベル付けられていると考えることができる。 G の edge は $\partial U(G)$ 上に対応する edge を2つもつ。その2つの edge 同士を twin と呼ぶことにする。

このとき free involution $\tau(\Sigma)$ は、1) $L_1(\Sigma)$ の1-ラベル付けと compatible、つまり $\tau(\Sigma)$ は $\partial U(G)$ 上の1-ラベル付き edge を同じ1-ラベルの付いた edge に写す 2) $\tau(\Sigma)$ は twin edge 同士を写さない⁽¹⁾、の2つの性質を持っている。

逆に1-ラベル付きグラフ $L_1 = (S, G, h)$ に対し $S - \overset{\circ}{U}(G)$ 上の free involution τ が存在して、1) τ は L_1 の1-ラベル付けと compatible で 2) τ は twin edge 同士を写さないとする。この involution を L_1 と compatible な free involution と呼ぶ。このときある GS $\Sigma = (S, G, f)$ が存在して、 $L_1 \equiv L_1(\Sigma)$ かつ $\tau = \tau(\Sigma)$ となっている。このことを補題の形で述べておく。

⁽¹⁾3重型の場合ここでいう edge は G の edge から決まる edge ではなく、singular block bundle から決まるものとする。

補題 10 GS $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $\tau(\Sigma)$ は $L_1(\Sigma)$ と compatible な free involution である。逆に 1-ラベル付きグラフ $L_1 = (S, G, h)$ に対し L_1 と compatible な free involution τ が存在するとき, GS $\Sigma = (S, G, f)$ が存在して, $L_1 = L_1(\Sigma), \tau = \tau(\Sigma)$ が成立する。

以下 2つの $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G, f')$ は同じ 1-ラベル付きグラフを与える, つまり $L_1(\Sigma) \equiv L_1(\Sigma')$ を満たすものとする。またこのとき f から決まる involution $\tau(\Sigma)$ を τ , f' から決まる involution $\tau(\Sigma')$ を τ' と略記する。

ここで次を定義する。

定義 11 ℓ を $\partial U(G)$ のある component とする。 $L_1(\Sigma) \equiv L_1(\Sigma')$ を満たす任意の Σ' に対し, Σ と Σ' の同値を与える同相写像 F が存在して $F(\tau(\ell)) = \tau'(F(\ell))$ が成立するとき ℓ は性質 (*) を持つという⁽²⁾。

また G の 3-regular subgraph H に対し, $\partial U(H)$ のすべての component が性質 (*) を持つとき, H は性質 (*) を持つという。

補題 12 3-regular subgraph H が hoop を持たなければ, 性質 (*) を持つ。

証明 性質 (*) を持たないとすると, ある $\ell \subset \partial U(H)$ が存在して, $\tau(\ell) \neq \tau'(\ell)$ となっている。そうでなければ F として identity をとった場合性質 (*) を持つってしまう。 ℓ が 1 辺形の場合は, ℓ と同じ 1-ラベルを持ち 1 辺形になるものはもう 1 つしかないのだから, $\tau(\ell) \neq \tau'(\ell)$ とはならない。よって ℓ は 1 辺形でないとする。

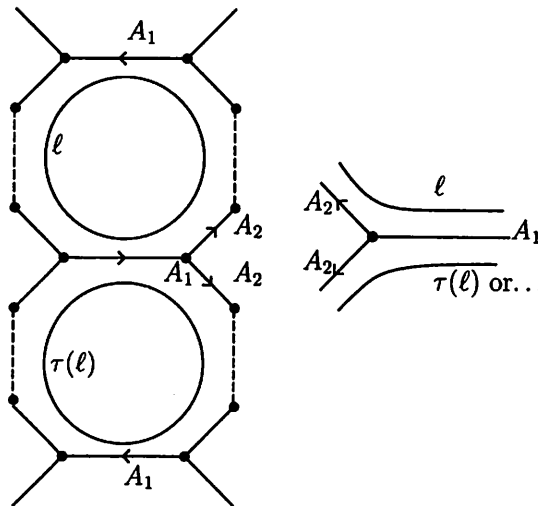


図 13

⁽²⁾ただし, 特別な場合を除いてほとんどの場合 F は identity である。

(1) $\tau(\ell) = \ell$ のとき, ℓ の 1-ラベルの列は $A_1 A_2 \cdots A_n A_1 A_2 \cdots A_n$ となっている。1-ラベル A_1 をもつ G の edge は 3 つしかないので図 13 左図のような部分が発生する。これは補題 8 に矛盾する。

(2) $\tau(\ell) \neq \ell$ かつ $\tau'(\ell) \neq \ell$ のとき。このとき $\ell, \tau(\ell), \tau'(\ell), \tau(\tau'(\ell))$ の 4 つはそれぞれ異なっている。 ℓ の 1-ラベルの 1 つを A_1 とすると ℓ に含まれる 1-ラベル A_1 は 1 個だけである。よって図 13 右図のような部分が必要であるが, これは補題 8 に矛盾する。

定義 13 G の edge に対応する $\partial U(G)$ 上の edge α を考える。1-ラベル付けと compatible な 2 つの free involution τ, τ' に対し $\tau(\alpha) = \tau'(\alpha)$ が成立するとき (τ と τ' に関して) **type 0** と呼び, $\tau(\alpha)$ と $\tau'(\alpha)$ が twin であるとき **type A** と呼び, それ以外の場合 **type B** と呼ぼう。

補題 14 1-ラベル付けと compatible な 2 つの free involution τ, τ' と同じ 1-ラベル A を持つ 6 つの edge に対し, type の組合せは以下の 4 つ。

- (0) すべて type 0
- (1) type 0, type A, type B がそれぞれ 2 つ
- (2) type A が 2 つ, type B が 4 つ
- (3) すべて type B

証明 幾つかの Fact を示しながら証明する。edge α と α' は twin とする。6 つの edge を $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ とする。

Fact 1 α が type 0 ならば $\tau(\alpha)$ も type 0。

これは τ, τ' が involution ということからすぐに従う。

Fact 2 $\tau(\alpha)$ と $\tau(\alpha')$ は twin にはならない。 τ' についても同様。

$\tau(\alpha)$ と $\tau(\alpha')$ が twin だとする。 $\tau(\alpha) = \beta$ とすると, $\tau(\alpha') = \beta'$ となる。よって $\tau(\gamma) = \gamma'$ とならなければならず compatible の定義に矛盾する。

Fact 3 α が type A ならば $\tau(\alpha)$ は type B である。

$\tau(\alpha) = \beta$ とすると, $\tau'(\alpha) = \beta'$ である。 β が type 0 なら $\tau'(\beta) = \alpha = \tau'(\beta')$ となり矛盾。 β が type A なら $\tau'(\beta) = \alpha'$ なので, $\tau'(\alpha) = \beta', \tau'(\alpha') = \beta$ となるので Fact 2 に矛盾する。よって β は type B である。

Fact 4 α が type B ならば α' も type B である。

$\tau(\alpha) = \beta, \tau'(\alpha) = \gamma$ とする。 $\tau(\alpha') = \beta'$ とすると Fact 2 に矛盾するので, $\tau(\alpha')$ は γ または γ' である。同様に $\tau'(\alpha') = \gamma'$ とすると Fact 2 に矛盾するので, $\tau'(\alpha')$ は β または β' である。いずれの場合も α' は type B である。

補題の証明に入ろう。type 0 の edge の個数は, Fact 1 より偶数個である。Fact 4 より type B の個数も偶数個である。また Fact 3 より type B の edge の個数は type A の edge の個数以上である。type 0 の個数が 6 個のばあいは (0) である。type 0 の edge が 4 個存在すると, 残りも type 0 になるので丁度 4 個という事はない。type 0 が 2 個の場合, それらが twin という事はないので, Fact 4 より type 0 の twin は

type A になっている。この場合 (1) が起こる。type 0 が存在しない場合, type B の個数が type A の個数以上で偶数個という事から (2) または (3) である。

補題 15 X を $S - \dot{U}(G)$ の 1 つの component とする。このとき

- (1) X が 2-disk ならば ∂X は性質 (*) を持つ。
- (2) ∂X のある component が性質 (*) を持てば他のすべての component も性質 (*) を持つ。

証明 ∂X の hoop でない component は補題 12 より性質 (*) を持つ。よってでてくる component は hoop としてよい。

(1) X が 2-disk のとき。 $\alpha = \partial X$ が性質 (*) を持たないとするとある τ' が存在して $\tau(\alpha) \neq \tau'(\alpha)$ となる。 α の 1-ラベルが 3 重型のときは性質 (*) を持つので、 α の 1-ラベルを A とする。このとき補題 14 の (1), (2), (3) のいずれかになっている。

(1) のときは type B の edge 同士が twin になり、それが 2-disk を張っているの
で、この edge が乗っている 2-sphere S_i^2 に対し $G \cap S_i^2$ は 1 個の loop となっている。
 F を S 上の同相写像で S_i^2 以外で identity, S_i^2 上では $G \cap S_i^2$ を固定し ($G \cap S_i^2$
を赤道と見て) 北半球と南半球をいれかえるものとする。

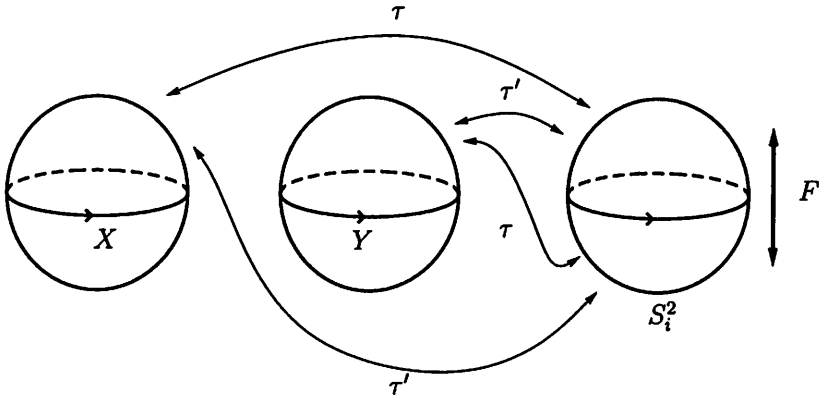


図 14

(2) のときはこれらの edge の乗っている 2-sphere S_i^2 はすべて $G \cap S_i^2$ が 1 個の loop となっている。 type B の edge が乗っている 2-sphere を $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ とする。 F を S 上の同相写像で $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ 以外で identity, $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ 上では $G \cap S_i^2$ を固定し北半球と南半球をいれかえるものとする。

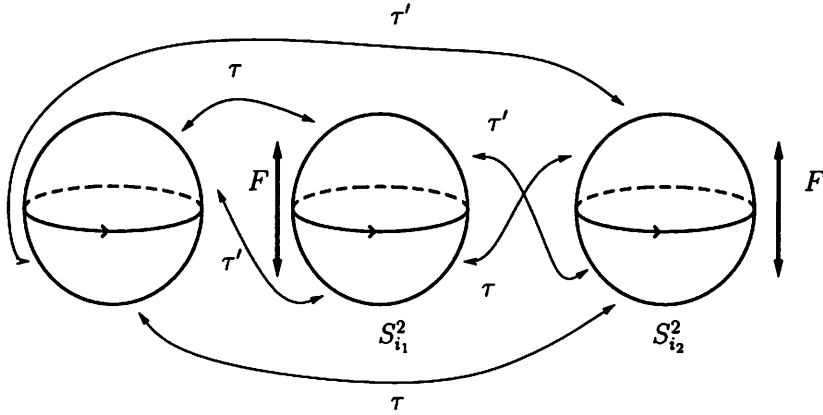


図 15

(3) のときはこれらの edge の乗っている 2-sphere S_i^2 はすべて $G \cap S_i^2$ が 1 個の loop となっている。type B の edge が乗っている 3 つの 2-sphere から 2 つを選んで $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ とする。 F を S 上の同相写像で $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ 以外で identity, $S_{i_1}^2, S_{i_2}^2$ 上ではそれらを入れ換えるものとする。ただし, ℓ を選ばれてない 2-sphere 上の component とするとき, $F(\tau(\ell)) = \tau'(\ell)$ を満たす様を選ぶ。

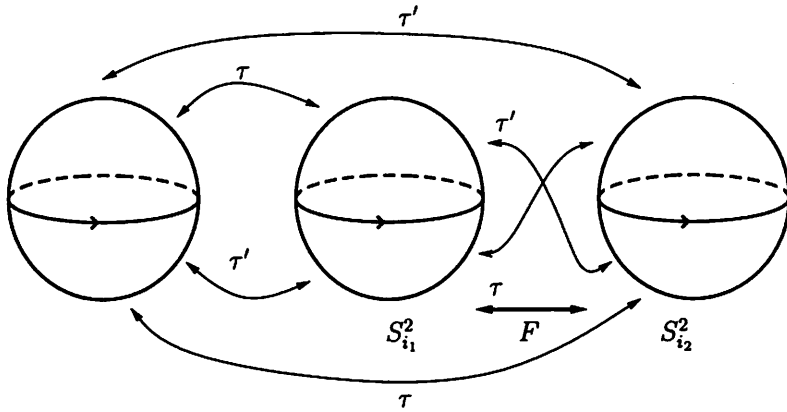


図 16

いずれの場合も F が同値を与えるので, 性質 (*) を持たない事に矛盾する。

(2) α が性質 (*) を持つ ∂X の component で β が性質 (*) を持たない component とする。よって $\tau(\beta) \neq \tau'(\beta)$ が成立しているとする。 $\tau(\alpha) = \tau'(\alpha)$ より $\tau(X) = \tau'(X)$ を得る。このとき $\tau(\tau'(\beta))$ は β と同じ 1-ラベルを持つ ∂X の他の component になっている。 $\beta, \tau(\beta), \tau'(\beta), \tau(\tau'(\beta))$ の 4 つは同じ 1-ラベルを持つ相異なる hoop なのでどれかは twin になるが, β と $\tau(\beta)$ 等 involution で移り合うものは twin になれないので, β と $\tau(\tau'(\beta))$ または $\tau(\beta)$ と $\tau'(\beta)$ が twin になってい

る。このときは ∂X または $\tau(\partial X)$ の 2 つの component が twin になるので, S に genus が発生して矛盾。

補題 16 H を 1-ラベル A をもつ 3 つの hoop からなる subgraph, $\partial U(H) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_6$ とするとき性質 (*) を持たない α_i の個数は, 存在したとすれば 4 個である。

証明 まず τ と τ' に関して補題 14 の (2), (3) の場合が起こらない事を示す。今 (2) または (3) が起こっているとす。

$S - \dot{U}(G)$ の α_1 を含む component を X とする。 X が 2-disk の場合は補題 15 より性質 (*) を持つので 2-disk でないとす。 ∂X には他の component β_1 が存在する。

各 α_i ($i = 1, \dots, 6$) に対して τ と τ' を何回か施した同相写像 κ_i が存在して $\alpha_i = \kappa_i(\alpha_1)$ となる。 $\beta_i = \kappa_i(\beta_1)$ $X_i = \kappa_i(X)$ とおくと, β_1, \dots, β_6 は同じ 1-ラベルを持つ edge である。

∂X が α_1 以外の α_i ($i \neq 1$) を含むと genus が発生するので (図 17 参照), α_1 以外の component は含まない。 よって $i \neq j$ のとき $X_i \neq X_j$ である。 よって $i \neq i$ のとき $\beta_i \neq \beta_j$ である。 このとき α_i, β_i ($i = 1, \dots, 6$) はそれぞれ 3 組の twin なので genus が発生して矛盾。 よって (2) または (3) は起きない。

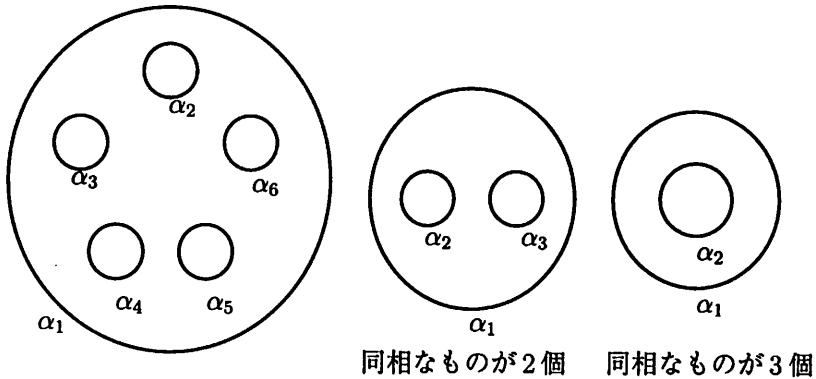


図 17

α_1 が性質 (*) を持たないとき, 2 つの involution τ, τ' に対して, α_5, α_6 が type 0 としてよい。別の involution τ'' が存在して, 例えば τ と τ'' に関し α_5 または α_6 が type 0 以外になっているとす。このとき $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ は τ, τ', τ'' で移りあうので, 前の議論と同様に矛盾が出る。よって性質 (*) を持たないのは (存在すれば) 4 個である。

補題 17 ㉔ ㉕ の 2 つの type を除いて G は性質 (*) を持つ。

証明 補題12より性質(*)を持たないのは hoop としてよい。また3重型の hoop は性質(*)を持つので3重型でないとしてよい。よって同じ1-ラベル A を持つ3個の hoop からなる G の subgraph H で性質(*)を持たないものが存在するとき、**Ⓐ** または **Ⓑ** になる事を示す。

$\partial U(H) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_6$ とする。補題12と補題16より、 α_1, α_2 が type B, α_3, α_4 が type A, α_5, α_6 が type 0 とする。ここで involution は $\tau(\alpha_3) = \alpha_1, \tau'(\alpha_3) = \alpha_2$ を満たしているとする。また α_3 と α_5, α_4 と α_6 が twin であるとする。

$S - \overset{\circ}{U}(G)$ の α_1 を含む component を X とする。 $\partial X = \alpha_1$ なら X は 2-disk で性質(*)を持つので(補題15), 他の component β を境界として含む。この β の1-ラベルが (1) A の場合と (2) そうでない場合, に分ける。

(1) 1-ラベルが A の場合: β は $\alpha_2, \dots, \alpha_6$ のいずれかに等しい。 α_5, α_6 に等しいとすると, 補題15に矛盾する。 α_2 に等しいとすると genus が発生して矛盾。よって α_3 または α_4 に等しい。ここで $\beta = \alpha_3$ としても一般性を失わない。

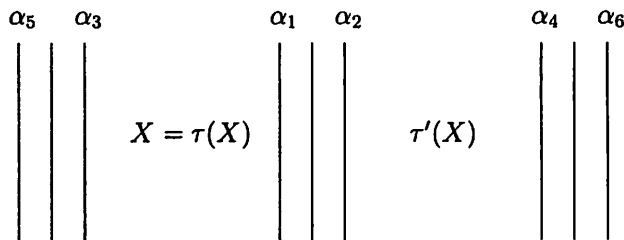


図 18

∂X が α_1, α_3 以外の component γ を含んでいるとする。このとき $\tau(X) = X$ なので ∂X は γ と同じ1-ラベルを持つ $\tau(\gamma)$ を含み, $\partial(\tau'(X))$ は同じ1-ラベルを持つ $\tau'(\gamma), \tau'(\tau(\gamma))$ を含む。このとき genus が発生して矛盾, よって X は annulus である。

α_1, α_3 はどちらも1-ラベル A を持つが, annulus 上で見て A の向きが逆になるような1-ラベル付けが存在すると, X 上の orientation preserving free involution を S^2 に拡張できるので, S^2 上に orientation preserving free involution が存在するので矛盾。よって X 上で見て α_1 と α_3 の1-ラベルの向きは順である。この場合 **Ⓐ** になる。

(2) 1-ラベルが A でない場合: $\beta_1 = \beta, \beta_3 = \tau(\beta), \beta_2 = \tau'(\beta_3), \beta_4 = \tau'(\beta)$ とおく。 β_1, \dots, β_4 は $X, \tau(\tau(X)), \tau(X), \tau'(X)$ の境界なので, 相異なっている。これらの中に twin が存在する。 β_1 と β_3 は $\beta_3 = \tau(\beta_1)$ という関係にあるので twin になれない。 β_1 と β_4 も同様に twin になれない。 β_1 と β_2 が twin になると genus が発生する。よって β_1 は他の β_i とは twin にならない。 β_2 も同様に他の β_i とは twin にならない。よって β_3 と β_4 が twin になっている。

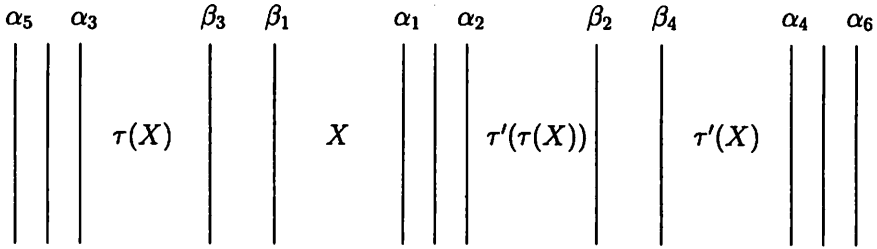


図 19

∂X が α_1 と β_1 以外の component γ を含んだとする。 $\gamma, \tau(\gamma), \tau'(\gamma), \tau'(\tau(\gamma))$ の 4つは異なるので、このなかに twin が存在するが、 γ と $\tau(\gamma), \gamma$ と $\tau'(\gamma)$ は twin になれないので、 γ と $\tau'(\tau(\gamma))$ または $\tau(\gamma)$ と $\tau'(\gamma)$ が twin になる。しかしいずれの場合も genus が発生して矛盾。よって X は annulus である。 α_1 の 1-ラベル A と β_1 の 1-ラベル B を順な方向に選んでおくと、 \textcircled{B} の type が起こっている事が分かる。

補題 18 3-regular subgraph H が性質 (*) を持ち 3 重型の 1-ラベルを持たなければ、 H のまわりで identification は unique, すなわち $f|_{U(H)} = f'|_{U(H)}$ が成立する。

証明 3 重型をもたないので、 hoop の場合 identification は unique である。よって hoop でない component を考える。 l を $\partial U(H)$ の任意の component とする。このとき l と交わる $U(H)$ の任意の subblock b に対し $\tau(b-H) = \tau'(b-H)$ を示せばよい。これが成立していないとする。 l が 1 辺形の場合成立しているので、 l は 1 辺形ではないとする。 b と交わる H の edge の 1-ラベルを A としその隣の 1-ラベルを A_2 とする。 $\tau(b-H) = b-H$ という事はありえない (同様に $\tau'(b-H) = b-H$ も)。よって $b-H, \tau(b-H), \tau'(b-H), \tau'(\tau(b-H))$ は相異なる subblock である。このなかには twin が存在し、補題 8 に矛盾する。(図 20 は b と $\tau(b)$ が twin として描いてある。)

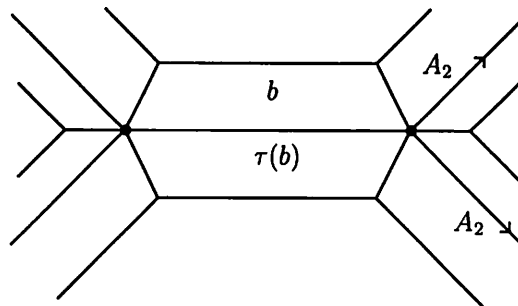


図 20

これまでの補題でほとんど明らかだが一応命題5を証明しよう。 $L_1(\Sigma)$ が④, ⑤の type を持たなければ補題17より性質(*)を持つ。また⑥の type を持たないので3重型はない。よって補題18より G の周りで identification は unique, よって $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ が成立する。

3 命題6の証明

この節では命題6を証明する。 X を planar surface とし, τ を X 上の free involution とする。 c を X 内の loop で $\tau(c) \cap c = \emptyset$ となるものとする。このとき τ' を次の様に定義する。 T_c を c に沿った Dehn twist とする。 $x \in X - (\dot{U}(c) \cup \tau(\dot{U}(c)))$ に対しては $\tau'(x) = \tau(x)$, $x \in \tau(U(c))$ に対しては $\tau'(x) = T_c \tau(x)$, $x \in U(c)$ に対しては $\tau'(x) = \tau T_c^{-1}(x)$ とする。 τ' は X 上の free involution になるが, このとき τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるという事にしよう。

また境界を固定した F の isotopy $H_t (0 \leq t \leq 1)$ が各レベル t で $H_t \tau$ が free involution のとき equivariant isotopy といい, $\tau' = H_1 \tau$ となるとき τ' は τ から equivariant isotopy で得られるという。

τ' が τ から基本 Dehn 変形と equivariant isotopy の有限列で得られるとき, Dehn 変形で得られるという。次の補題は Dehn twist と Dehn surgery の基本的関係から容易に得られる。

補題 19 $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ となる2つのGS $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G, f')$ を考える。 X を $S - \dot{U}(G)$ の component の集まりで τ invariant なものとする。 τ' が τ から X に関する equivariant isotopy でえられるとき, $\Sigma \equiv \Sigma'$ である。

また c を $c \cap G = \emptyset$ かつ $c \cap \tau(c) = \emptyset$ となる loop とする。 $d = f(c)$ を c を $M(\Sigma)$ 内の knot と見たものとする。 τ' は τ から (c に沿った) 基本 Dehn 変形で得られるものとする。このとき $M(\Sigma)$ を d に沿って ± 1 -surgery してできる多様体は $M(\Sigma')$ である。特に d は trivial knot であるので $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ である。

異なる identification を持つ場合にも多様体の同相を示すため補題を用意する。

補題 20 τ を annulus X 上の orientation preserving free involution とする。 m を X の proper arc で ∂X の異なる component を結ぶものとする。このとき τ から equivariant isotopy で得られる free involution τ_1 で $\tau_1(m) \cap m = \emptyset$ となるものが存在する。

証明 m に向きを入れておく。最初に $m \cap \tau(m)$ が $+1$ 及び -1 の intersection number を共に持つ場合を考える。innermost な 2-disk d を考える。このとき $\tau(d) = d$ なら fixed point が発生する。また $d \cap \tau(d) \neq \emptyset$ のとき, 共通点は1点のみとなる。この点が fixed point になる。よって $d \cap \tau(d) = \emptyset$ となっている。このとき equivariant isotopy によって intersection を消す事ができる。

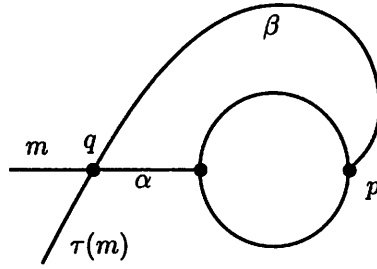


図 21

よって intersection が存在するとき, intersection number はすべてプラスまたはすべてマイナスとする。 $\tau(m)$ 上に境界点 p から次の $m \cap \tau(m)$ の点 q まで arc β をとる。 m 上に点 q から $\tau(p)$ まで arc α をとる。このとき, α が点 q 以外に $\tau(m)$ と intersection を持てば ± 1 の intersection の点が発生する。よって $\alpha \cap \tau(m) = q$ である。このとき $\tau(\beta) = \alpha$ で $\tau(q) = q$ となり固定点を持つので矛盾。

補題 21 τ, τ' を annulus X 上の orientation preserving free involution で $\tau|_{\partial X} = \tau'|_{\partial X}$ を満たすとする。このとき τ' は τ から有限回の equivariant isotopy による変形で得られる。

証明 境界の異なる component どうしを結ぶ arc を m とし, その境界の点を p, q とする。補題 20 により $m \cap \tau(m) = \emptyset$, $m \cap \tau'(m) = \emptyset$ とできる。

$\ell = \tau(m)$ とおき, $\Gamma = (m \cap \tau'(m)) \cup (m \cap \tau'(\ell)) \cup (\ell \cap \tau'(\ell))$ とする。 $\Gamma = \{p, q\}$ のとき, $m \cup \tau'(\ell)$ は 2-disk d を bound している。 $d \cap \tau'(d) = \emptyset$ なので, ここで equivariant isotopy を用いて τ' を変形し (変形した結果を τ_1 と書く), $\tau(m) = \tau_1(m)$ とできる。 $X - (U(m) \cup U(\tau(m)))$ は 2つの 2-disk なので, τ_1 をさらに equivariant isotopy で τ と一致させることができる。

よって Γ が p, q 以外の点を含んでいるとする。このなかで innermost なものを考える: α, β を $m, \ell, \tau'(m)$ または $\tau'(\ell)$ 内の arc で以下の条件を満たすものとする。 $\alpha \cap \beta$ が 2点, $\alpha \cup \beta$ が bounde する 2-disk を d とするとき, d と $m \cup \ell \cup \tau'(m) \cup \tau'(\ell)$ の intersection は $\alpha \cup \beta$ のみ。この d に対し $d \cap \tau'(d) = \emptyset$ が分かるので, この 2-disk に関し equivariant isotopy を行って intersection を減らすことができる。 ■

ここで命題 6 を証明するため次を定義する。

GS $\Sigma = (S, G, f)$ と S 上の loop c で $c \cap G = \emptyset$, $c \cap \tau(c) = \emptyset$ を満たすものに対し新しい GS $\Sigma(c)$ を次の様に定義する。ただし $M(\Sigma)$ が orientable のときは B には $M(\Sigma)$ の向きと同調する向きが入っているものとする。

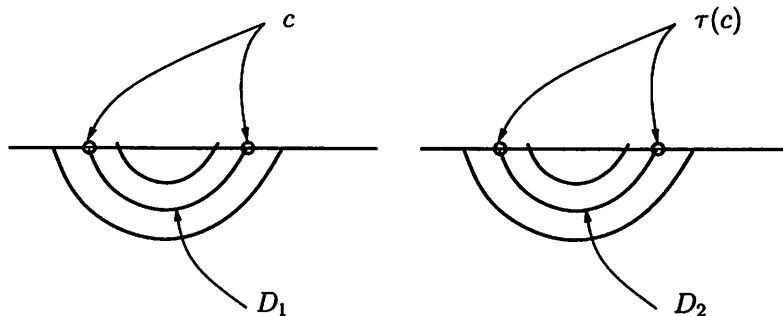


図 22

B 内で c 及び $\tau(c)$ が bound する proper な 2-disk をそれぞれ D_1, D_2 とする。 $U(D_i) = D_i \times [-1, 1]$ を D_i の B における regular neighborhood とする。ただし $\partial D_i \times [-1, 1]$ が ∂D_i の S における regular neighborhood で、 $\tau(\partial D_1 \times \{\pm 1\}) = \partial D_2 \times \{\pm 1\}$ となる様にとる。

$B' = B - (\overset{\circ}{U}(D_1) \cup \overset{\circ}{U}(D_2))$, $S' = \partial B'$ とおく。fake surface $P = f(S)$ に対し、 $P' = (P - \partial D_1 \times (-1, 1)) \cup (E_1 \cup E_2)$ とおく。ただし E_i は 2-disk で $\partial f(\partial D_1 \times \{1\}) = \partial E_1$, $\partial f(\partial D_1 \times \{-1\}) = \partial E_2$ となるものとする。 $f' : S' \rightarrow P'$ を $x \in S$ のときは $f'(x) = f(x)$, $f'(D_1 \times \{1\}) = f'(D_2 \times \{1\}) = E_1$, $f'(D_1 \times \{-1\}) = f'(D_2 \times \{-1\}) = E_2$ を満たす様に定義する。このとき、 $\Sigma(c) = (S', G, f')$ と定義する。 $M(\Sigma)$ と $M(\Sigma(c))$ の関係は次の補題で与えられる。

補題 22 (1) $S^2 = D_1 \cup D_2$ が $M(\Sigma)$ の separating 2-sphere のとき、 $M(\Sigma(c)) = M_1 \cup M_2$ (disjoint union) と分かれ、 $M(\Sigma) \cong M_1 \# M_2$ となる。

(2) $S^2 = D_1 \cup D_2$ が non-separating 2-sphere のときは $M(\Sigma)$ が orientable のときは $M(\Sigma) \cong M(\Sigma(c)) \# (S^2 \times S^1)$, orientable のときは $M(\Sigma) \cong M(\Sigma(c)) \# (S^2 \times_{\tau} S^1)$ となる。

注意 23 (1) $M(\Sigma)$ が向き付け可能かどうかは $L(\Sigma)$ で決まる。

(2) $M(\Sigma(c))$ が補題 22 の (1) か (2) かは $L(\Sigma)$ から決まる。

(3) $M(\Sigma(c))$ が connected でないとき、connected sum は 3-ball を除く場所に依存するが、この場所は $L(\Sigma)$ で決定される。

最後に命題 6 の証明を与えよう。 $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G, f')$ が $L(\Sigma) \equiv L(\Sigma')$ を満たしているとする。 $\partial U(G)$ の component c で $S - \overset{\circ}{U}(c)$ では 2-disk を bound せず、 $c \cap \tau(c) = \emptyset$ となるものの個数についての induction で示す。

(1) この様な c が存在しないとき、 $S - \overset{\circ}{U}(G)$ の component X で 2-disk と annulus 以外のものが存在すると、この様な c は存在する。すべて 2-disk なら、DS diagram

の場合と同様に $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ となるので, X は annulus とする。 $\tau(X) \neq X$ なら, c が存在するので, $\tau(X) = X$ とする。また τ が orientation reversing なら, 境界成分同士を入れ換えるので, c が存在する。よって τ は orientation preserving とする。このとき補題 21 を適用する事により $\Sigma \equiv \Sigma'$ となり, $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ が分かる。

(2) c が存在するとき, $\Sigma(c), \Sigma'(c)$ に帰納法の仮定を用いると $M(\Sigma(c)) \cong M(\Sigma'(c))$ が分かる。

(a) $M(\Sigma(c)) = M_1 \cup M_2$, $M(\Sigma'(c)) = M'_1 \cup M'_2$ のとき: $M(\Sigma)$ が orientable のとき, f, f' は向きが同調するよう選ばれているので, M_1 と M'_1 が向きもこめて同相なら M_2 と M'_2 もそうであるし, M_1 と M'_1 が向きを逆にして同相なら M_2 と M'_2 もそうである。このとき $M_1 \# M_2$ と $M'_1 \# M'_2$ は向きもこめて同相か, 向きを逆にして同相である。 $M(\Sigma)$ が non-orientable のときは $M_1 \# M_2 \cong M'_1 \# M'_2$ である。

(b) $M(\Sigma(c))$ が connected のとき: $M(\Sigma)$ が orientable のとき, $M(\Sigma) = M(\Sigma(c)) \# S^2 \times S^1$, $M(\Sigma') = M(\Sigma'(c)) \# S^2 \times S^1$ より $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ である。 non-orientable の場合も $M(\Sigma) = M(\Sigma(c)) \# S^2 \times_{\tau} S^1$, $M(\Sigma') = M(\Sigma'(c)) \# S^2 \times_{\tau} S^1$ より $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ である。 ■

参考文献

- [1] Ikeda, H, Singular block bundles, Yokohama Math. J 22(1974), pp 79–100