HAKONE SEMINAR 18(2002)57-70.

GS変形について

河野 正晴 (北見工業大学工学部)

generalized DS diagram(以下GSと略する)に対しその変形を定義し,「同相な多様体を与えるGSはGS変形で移りあえる」事を証明します。S変形の定義を変更しました。箱根の定義のままだとS変形がG変形の逆にはならないので…。GSの定義等は[3]を参考にして下さい。

定義 1 [GS変形] GS $\Sigma = (S, G, f)$ に対し2種類の変形を定義するが，そのため最初に次を定義する。τ を GS Σ から定義される involution とする。S の点 q がループ C の極限点 (*limit point*) であるとは，Σ のある面 X，$C \cap X$ の点列 $\{p_n\}$，$C \cap G$ の点 p が存在して，$p = \lim_{n\to\infty} p_n$ かつ $q = \lim_{n\to\infty} \tau(p_n)$ となっているときをいう。C の極限点全体の集合を $\lim(C)$ と書く。S 上の loop C が次の条件を満たしているとき Σ に関し一般の位置 (*gereral position*) にあるという。

(1) $C \cap V(G) = \emptyset$

(2) C と G は transversal

(3) $\lim(C) \cap C = \emptyset$

(4) C と $\tau(C - G)$ は transversal

$\mathsf{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_p$, $\partial\mathsf{B} = S = S_1 \cup \cdots \cup S_p$ とする。C は Σ に関し general position であるとする。C を bound する B 内の proper な 2–disk を D とする。D はある B_i 内で proper になっている。B_i を D で cut してできる 3-ball を B_{i1}, B_{i2} とする。$S' = S_1 \cup \cdots S_{i-1} \cup \partial B_{i1} \cup \partial B_{i2} \cup S_{i+1} \cup \cdots \cup S_p$, $G' = \tilde{G} \cup C_1 \cup C_2 \cup \overline{\tau(c - G)}$ とおく。ただし C_1, C_2 は $\partial B_{i1}, \partial B_{i2}$ における C のコピーで，$\tilde{G}$ は S' における G のコピー。f' は $S - C$ 上では f と同じ，D_1, D_2 を D のコピーとするとき，D_j 上では2つを対応点において張り合わせる写像とする。このとき $\Sigma' = (S', G', f')$ は GS になる (命題2参照)。この変形を C に沿った (または D に沿った) S変形 (*spoon cut, S deformation*) と呼ぶ。

X, Y を GS Σ のある面とする。ただし,

(1) $f(X) = f(Y)$

(2) $\overline{X}, \overline{Y}$ は 2–disk,

(3) X と Y は異なる 2–sphere に乗っているとする。

X は S_1 上 Y は S_2 上にのっていると仮定する。このとき $S' = (S_1 - X) \cup_f (S_2 - Y) \cup S_2 \cup \cdots \cup S_p$, $G' = (G - X - Y) \cup V(G)$, $f' = f|_{S'}$ とおくと，$\Sigma' = (S', G', f')$ も GS

になる。この変形を X に沿った（または Y に沿った）**G 変形** (*glue, G deformation*) と呼ぶ。

S 変形と G 変形を有限回繰り返して得られる変形を **GS 変形** (*GS deformation*) と呼ぶ。

図 1 は general position でない例である。左図は極限点が C 上にのっている。右図は C と $\tau(C-G)$ が接している。いずれの場合も C をわずかに変形すれば general position になる。DS diagram は池田 (1–2)。

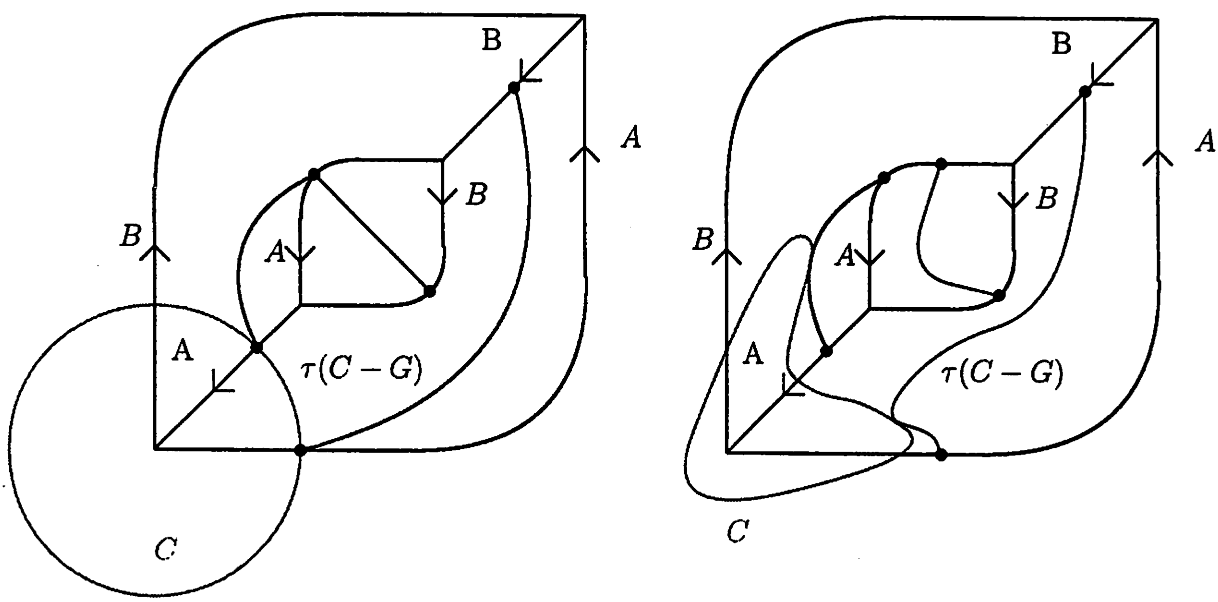


図 1

DS diagram の基本的な DS 変形である Φ^- 変形，Φ^+ 変形，Ψ^- 変形，Φ^+ 変形 [6] は GS 変形になる。DS 変形はこれらの有限列で書けるので，DS 変形は GS 変形である事が分かる。

DS 変形では 2 辺形つぶし等を行うときに，同じラベルの disk はつながない等の禁則条件が存在したが，GS 変形の場合，この禁則条件は必要ない。

GS を $\Sigma = (S, G, f)$ とする。$S = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ とするとき，$n(\Sigma) = \sharp S = p$ をこの GS の**球面数** (*sphere number*) と呼ぶ。Φ 変形，Ψ 変形，piping は球面数を変えない GS 変形である。

命題 2 S 変形，G 変形で得られる polygram は GS になる。

証明　S 変形，G 変形の結果が polygram([2] 参照) になる事は容易に分かる。あとは G' が 3–regular になる事，f' が面上で 2 対 1，辺上で 3 対 1，頂点上で 4 対 1 をチェックすればよい。

定理 3 連結な多様体を表現する GS は GS 変形で DS にできる。

多様体が連結でない場合この定理は勿論成立しない。前半はこれを目標に GS を「整形」していく。以下多様体は連結とする。

定義 4 GS の面 X が開円板のとき，この面は円板型 (*disk type*) であるという。GS のすべての面が円板型のとき，この GS を円板型 (*disk type*) と呼ぶ。

命題 5 GS は GS 変形で球面数を変えずに，円板型にできる。

補題 6 ([3]) X を plannar surface, τ を X 上の free involution とする。$p, q \in \partial X$ で $\tau(p) \neq q$ かつ p, q は ∂X の別の component に乗っているとする。このとき X の proper な arc m で，$\partial m = \{p, q\}$, $m \cap \tau(m) = \emptyset$ を満たすものが存在する。

命題 5 の証明：　円板型でない面 X が存在したとする。τ に関し equivariant な G の regular neighborhood $U(G)$ を 1 つ固定する。$\left(S - \mathring{U}(G)\right) \cap X = X'$ に補題 6 を適用し，arc m' を取ってくる。∂m が $E(G)$ 上にあり，$m \cap \overline{\tau(m - G)} = \emptyset$ となる様に m' を m まで延長しておく。m に沿った piping を実行すると X の boundary component の数が 1 つ減る。この変形は新たに annulus 等を発生させない。

定義 7 GS の面 X に対し，$\overline{X}$ が閉円板のとき，この面を純円板型 (*pure disk type*) という。各面が純円板型のとき，この GS を純円板型 (*pure disk type*) と呼ぶ。

命題 8 GS は GS 変形で球面数を変えずに，純円板型にできる。

補題 9 GS は piping を用いてループ型の辺をなくせる。特に円板型 GS は円板型を保ったまま，球面数を変えずにループ型の辺をなくせる。ここで辺 e がループ型とは $f(e)$ がループになる場合をいう。

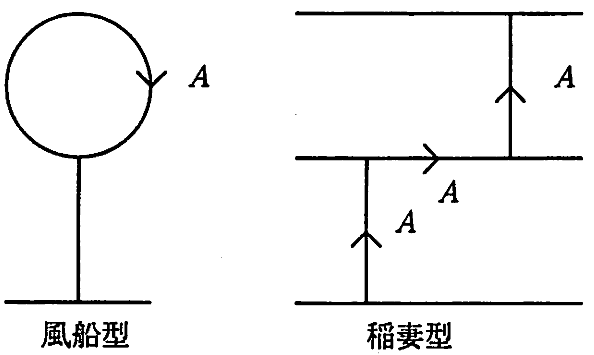


図 2

証明　ループ型は図2の様に風船型 [辺 e に対し $f^{-1}f(e)$ の成分の閉包の中にループが存在する] と稲妻型 (ジグザグ型) [$f^{-1}f(e)$ の成分の閉包はすべてループではない] の2つがある。風船型は図3の様に最初に $PQRS$ のラベルのついたループに関しS変形を行い，Q をラベルにもつ2角形でG変形を行う (点線に沿ったpipingでもある)。稲妻型の場合も同様な変形を行えば図4の様に消す事ができる。このとき新たにループ型の辺は生じていない。∎

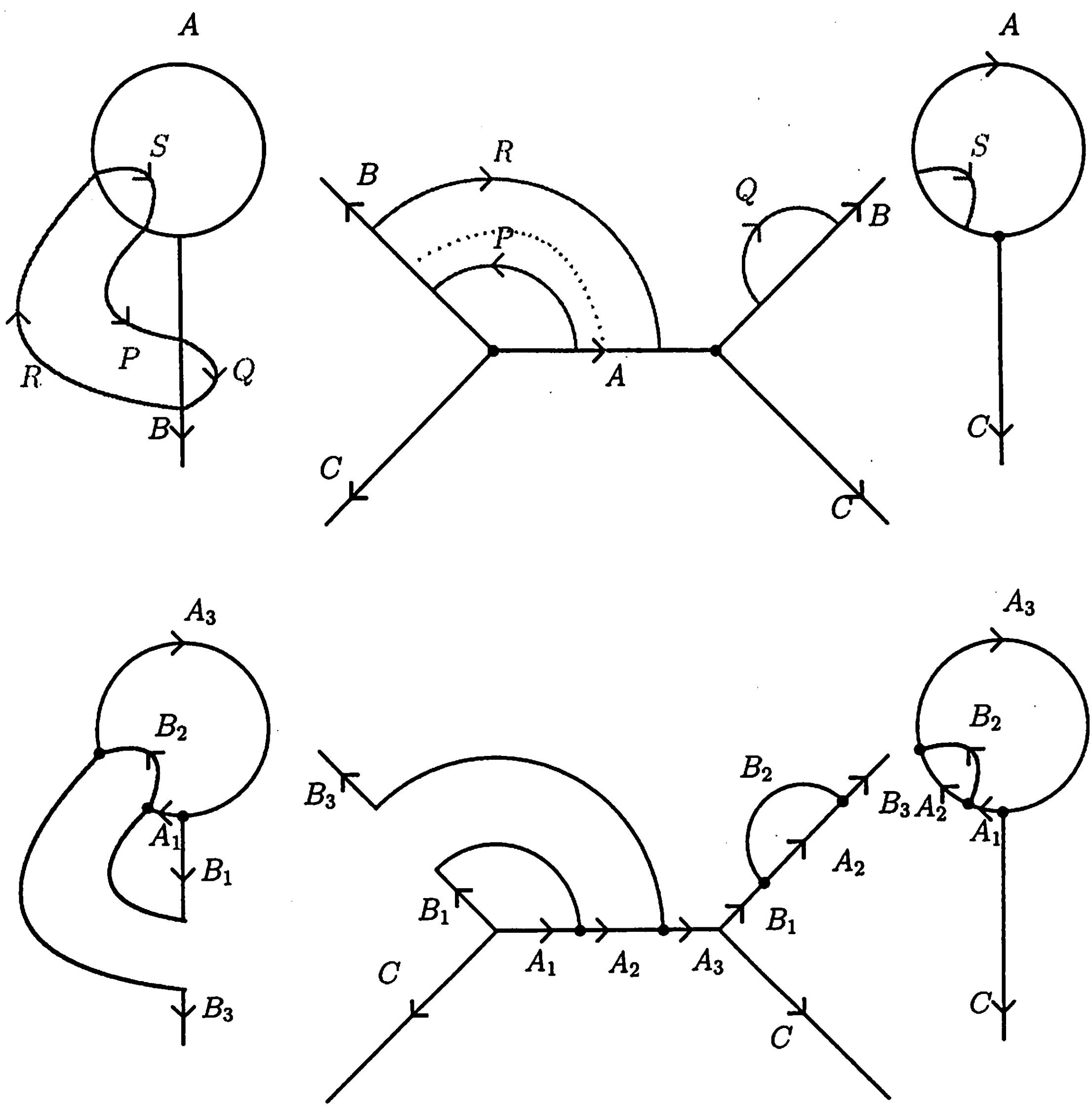


図 3

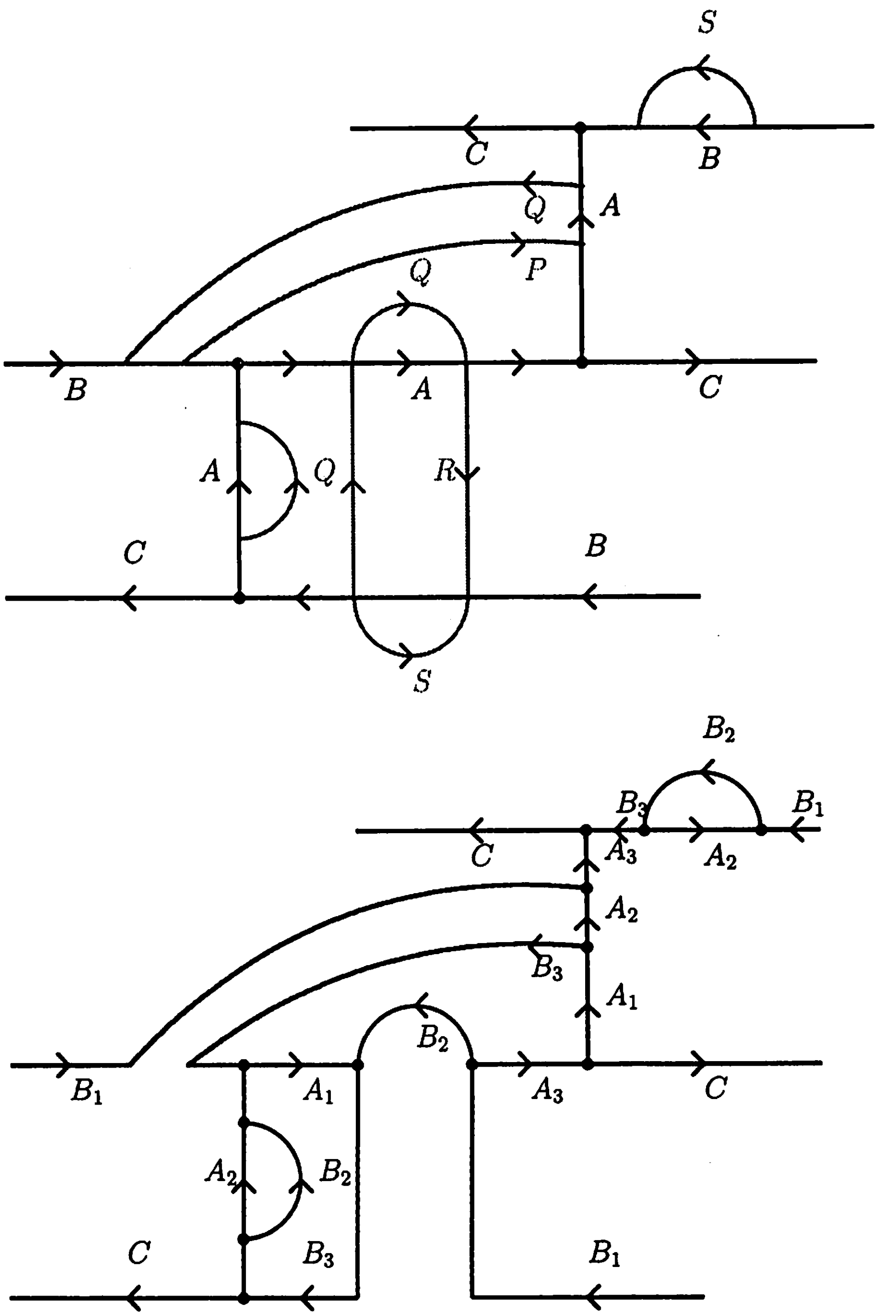
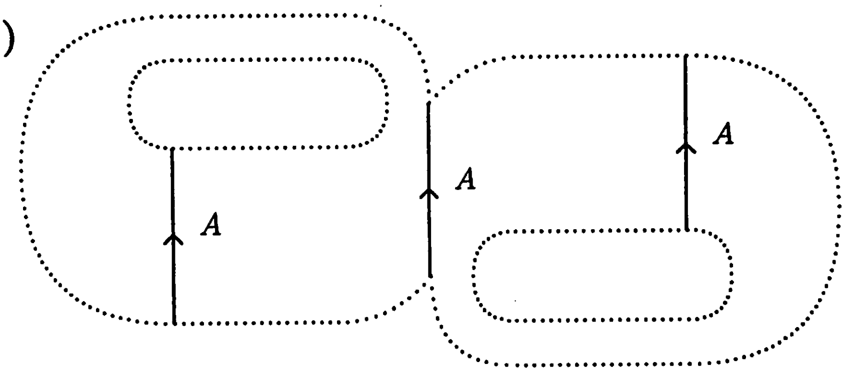


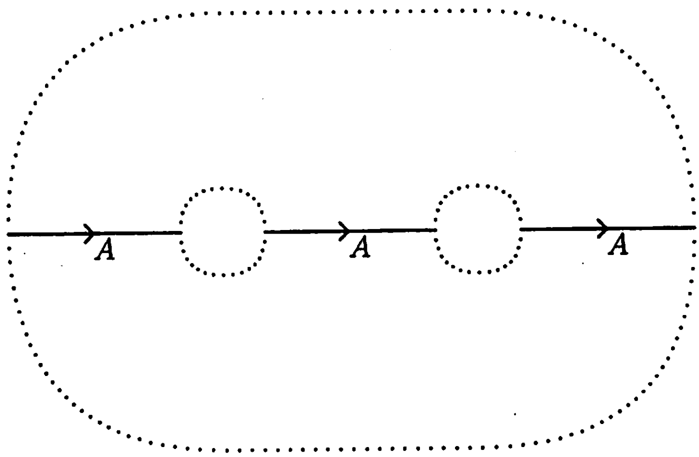
図 4

命題 8 の証明：　最初に GS を円板型に変形しておく。更に補題 9 を使ってループ型の辺をなくしておく。面 X の boundary ∂X に同じラベルが複数回出てくるのは図 5 で尽くされる。この中の (3–1), (2–1) をなくす事ができれば命題 8 が示される。

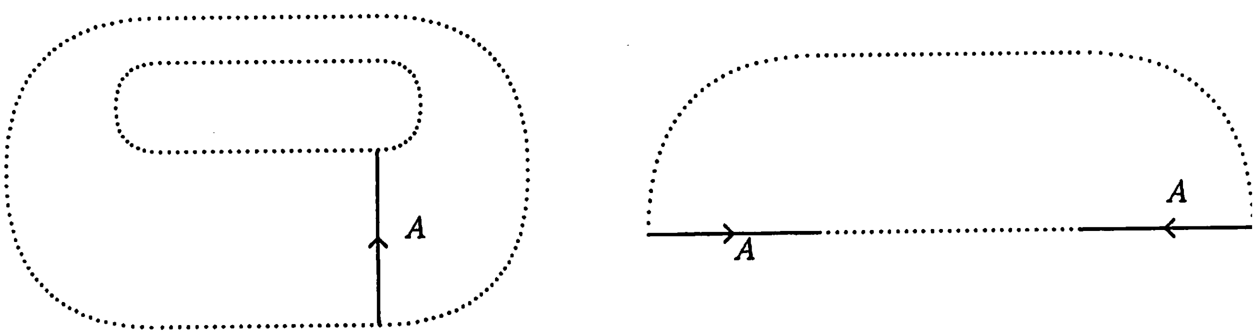
(3–1)



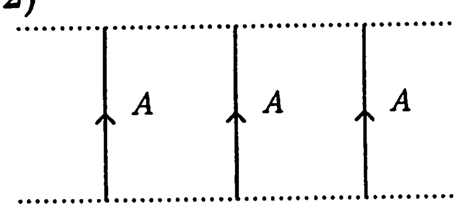
(3–2)



(2–1)



(2–2)



(2–3)

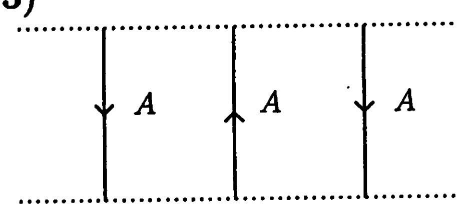


図 5

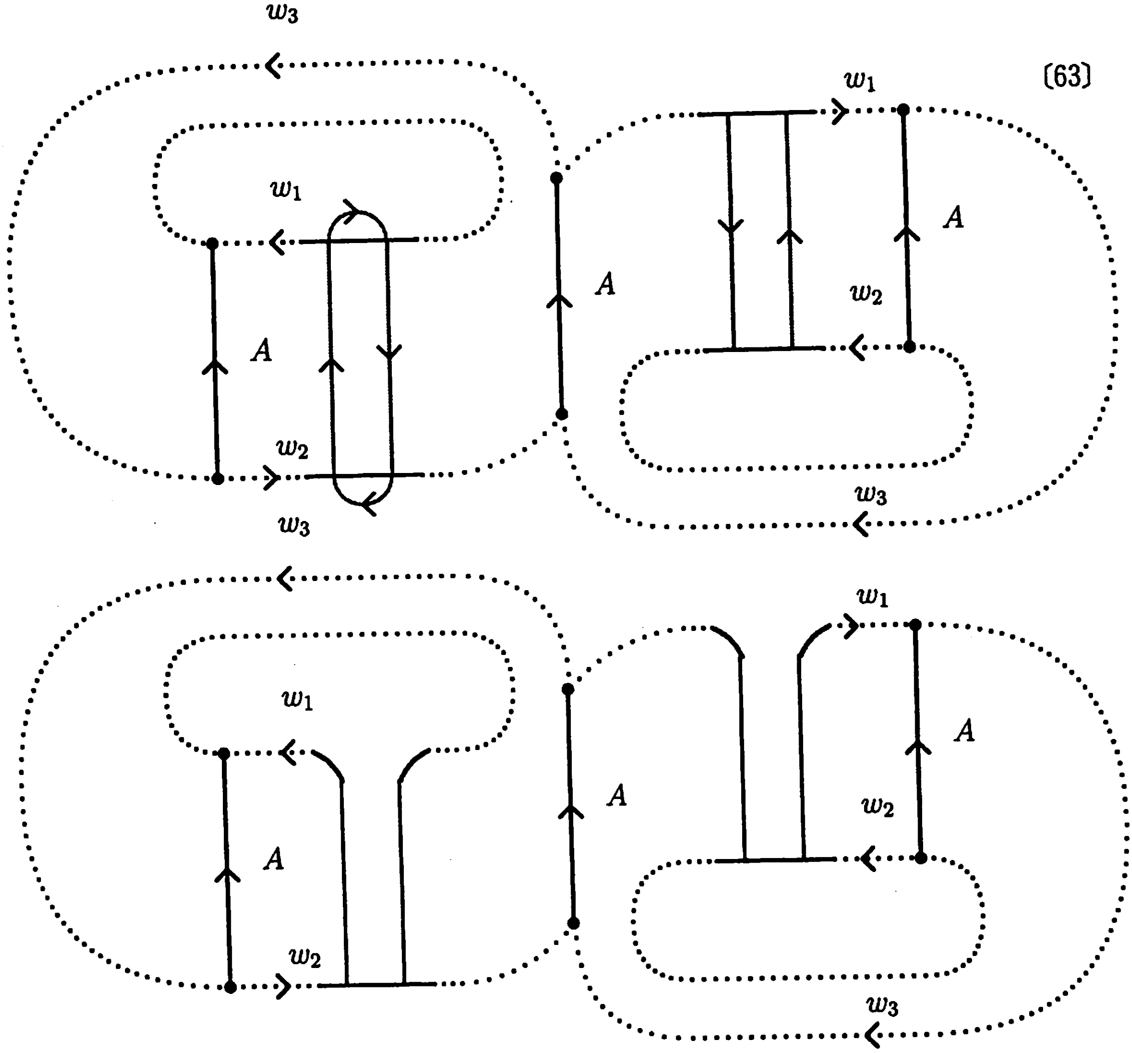


図 6

図 6 の様に (3–1) の場合 piping をする事により消す事ができる。このとき他の面 Y で $\overline{Y}$ が 2–disk でなくなるものはない。

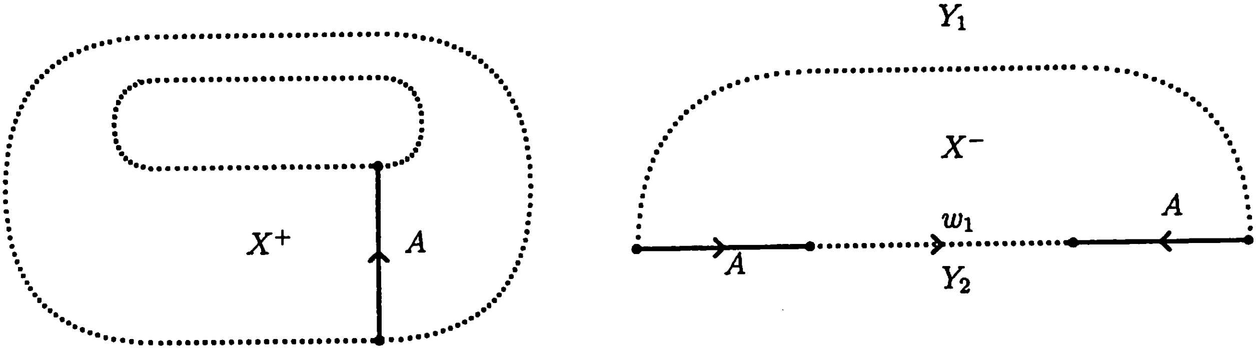


図 7

(2–1) の場合：図 7 の X^- のまわりの面 Y_1, Y_2 で $Y_1 \neq Y_2$ となるものが存在するとき，そこで piping をすれば消す事ができて，新たに発生する面 Z で $\overline{Z}$ が 2–disk ではないものは存在しない。よって ∂X^- の点線部分 (のちょっと外側) はすべてある面 Y^+ に属すると仮定する。w_1 の最初の辺のラベルを C とする。w_1 の内点には頂点が存在するので (存在しなければ A はループ型), そこから下向きでてきる辺のラベルを D とする。また X^- の左の A から下向きに出ている辺のラベルを B とすると図 8 の様になっている。

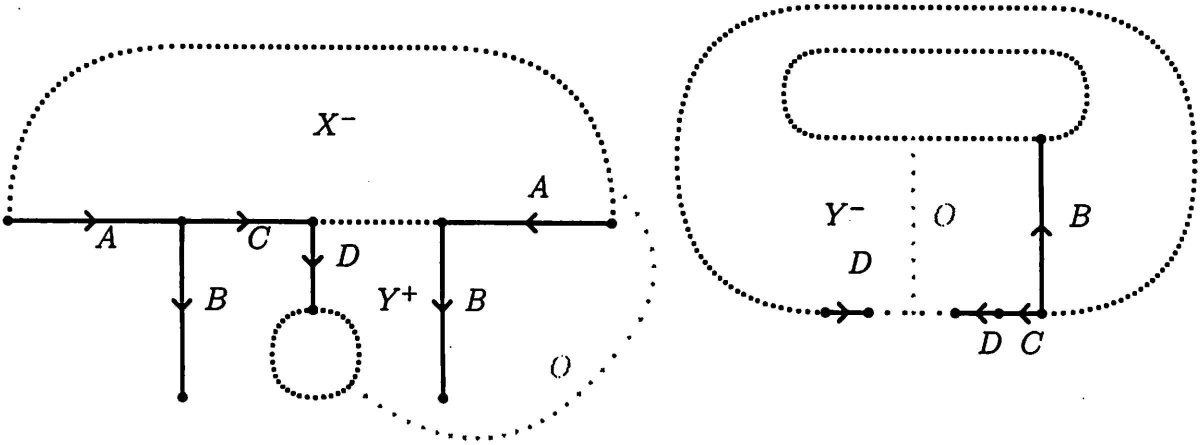


図 8

図 8 のオレンジ色 (カラーでないのでわかりませんね。O です。) の点線の様にそこに沿って piping を行う場所がある。(B に関する場所だが) その境界に同じラベルが複数回出てくる面の数は少なくなる。よってすべて消す事ができる。

更に (3–2), (2–2), (2–3) もなくせて次が成立する。

命題 10 各面 X に対し ∂X の中に同じ 1–label がないように piping で変形できる。

証明 (3–2) は piping で (2–3) に変形できる。

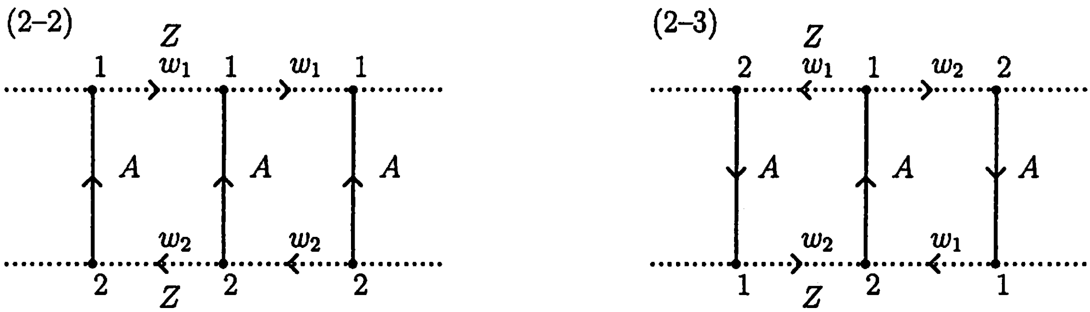


図 9

(2–2), (2–3) いずれの場合も上と下の面が異なればそこで piping が出来る。そこで上の面と下の面は同じ Z であるとする。w_1 の最初の辺のラベルを B とすると，ラベル B をもつ X の 2 つの辺が f で同一視されることはない。このときこれらの辺は，ここに現れていないラベル B をもつ辺の両側と同一視されるが，これは球面上ではおきない。よってどこかで piping できる。

定義 11 GS の面 X に対し Y をその張り合う相手とする。即ち $f(X)=f(Y)$ とする。

$X\neq Y$ となる Y が存在する場合，X と Y が同じ sphere にのっているとき自己型 (*self type*)，異なる sphere にのっているとき他型 (*other type*) と呼ぶ。$X\neq Y$ となる面がないとき，即ち自分自身で張りつくときも**自己型** (*self type*) と定義する。このとき自分自身で張りつく事を強調して**自己同一視型** (*self identified type*) とも呼ぶ。

定理 3 の証明： 球面数に関する induction で示す。

(1)： (球面数が 1 の場合) 命題 5 より，球面数を変えずに円板型にできる。このとき 3 重型の辺を持たなければ DS になっている。3 重型を持つ場合，円盤型という事から，辺はこれのみである事が分かる (多様体は $L(3,1)$)。辺の部分で local に piping をすると円盤型が一旦崩れる (グラフが連結でなくなる)。もう一度 piping をしてグラフを連結にすると，DS になっている。

(2)： (球面数 p が 2 以上の場合) 球面数が p より小さいとき成立を仮定する。

命題 8 より純円板型に変形する。面がすべて自己型のときは多様体が連結にならない。よって他型の面 X が存在する。3 重型の辺が他型になる事はありえない。X にそって G 変形をすると球面数が 1 つ減る。 ∎

次に Heegaard splitting と GS の関係を考え，次の定理を証明する。

定理 12 2 つの GS Σ, Σ' が同じ多様体を表現するとき，GS 変形で移りあえる。

ここでは次の定理に依存した証明を与える。

定理 13 (Reidemeister–Singer–Chillingworth–Craggs) M の 2 つの Heegaard splitting は安定同値である。

[1],[4],[5] 等を参考の事。

(H_1,H_2) を M の Heegaard splitting とする。handle body H_i $(i=1,2)$ の complete meridian disk system $\vec{D_i}=D_{i1}\cup\cdots\cup D_{in}$, が与えられたとき $(H_1,H_2\,;\,\vec{D_1},\vec{D_1})$ を M の Heegarrd diagram と呼ぶ。(通常の定義は $(H_1;\partial\vec{D_2})$ の様です。)

Heegaard diagram $(H_1, H_2\,;\vec{D}_1, \vec{D}_1)$ が与えられたとき，H_i を $\vec{D}_i$ でカットしてできる 3–球体を B_i^3 とし，$\partial B_i^3 = S_i$ とする $(i = 1, 2)$。また $\vec{D}_i$ の S_i 上におけるコピーを $\vec{D}'_i, \vec{D}''_i$ とすし，

$$G_i = \partial\vec{D}'_j \cap \partial\vec{D}''_i \cup (\partial\vec{D}_j \cap S_i) \subset S_i$$

とおく。ただしここで $\{i, j\} = \{1, 2\}$ とする。$S = S_1 \cup S_2$, $G = G_1 \cup G_2$ とおく。f は $S_i - \partial\vec{D}_i$ 上では Heegarrd splitting の張り合わせから決まるもの，$\vec{D}'_i$ と $\vec{D}''_i$ は対応する点が張り合わせられるものとする。この Σ は GS になる。この Σ を **Heegaasd diagram** から決まる **GS** と呼ぶ。

定義 14 GS Σ が次の 3 つの条件を満たすとき **H 型** (*H type*) という。
(1) Σ の球面数は 2 である。
(2) 自己型の面 X は純円板型。
(3) 自己型の面 X, Y に対し $X \neq Y$ ならば $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$ である。

次の命題は容易に分かる。

命題 15 Heegaard diagram から決まる GS は H 型である。逆に H 型の GS に対しある Heegaard diagram が存在して，GS は その Heegaard diagram から決まってる。

命題 16 GS Σ は GS 変形で H 型にできる。

証明　定理 3 より Σ を DS に変形しその後，S 変形を用いて球面数を 2 にしておく。命題 8, 10 を用いて純円板型にしておく。H 型の条件 (1), (2) は満たされている。このとき，これを崩さないように (3) の条件を満たすように変形できればよい。

自己型の面 X, Y に対し $X \neq Y$ かつ $\overline{X} \cap \overline{Y} \neq \emptyset (= \text{edge})$ となるものがなければ定理は成立する。その様な辺の個数についての induction で示す。

1 個もなければ (3) の条件は満たされている。存在しているとき，その辺のラベルを A とする。その横の面 W で他型なものが存在する。もし存在しなければ面 X を含む球面はすべて自己型になり，多様体が非連結になる。A の所で pipping を行う。図 10 の様に変形できる。x が自己型のとき y は他型，x が他型のとき y は自己型になっている。A での自己型の張り付きは解消されている。純円板型が崩れる場合があるが，これが起こるのは x が他型の場合のみである。このとき純円板型でなくなる 2–disk は他型のみであり，自己型が純円板型でなくなる事はない。

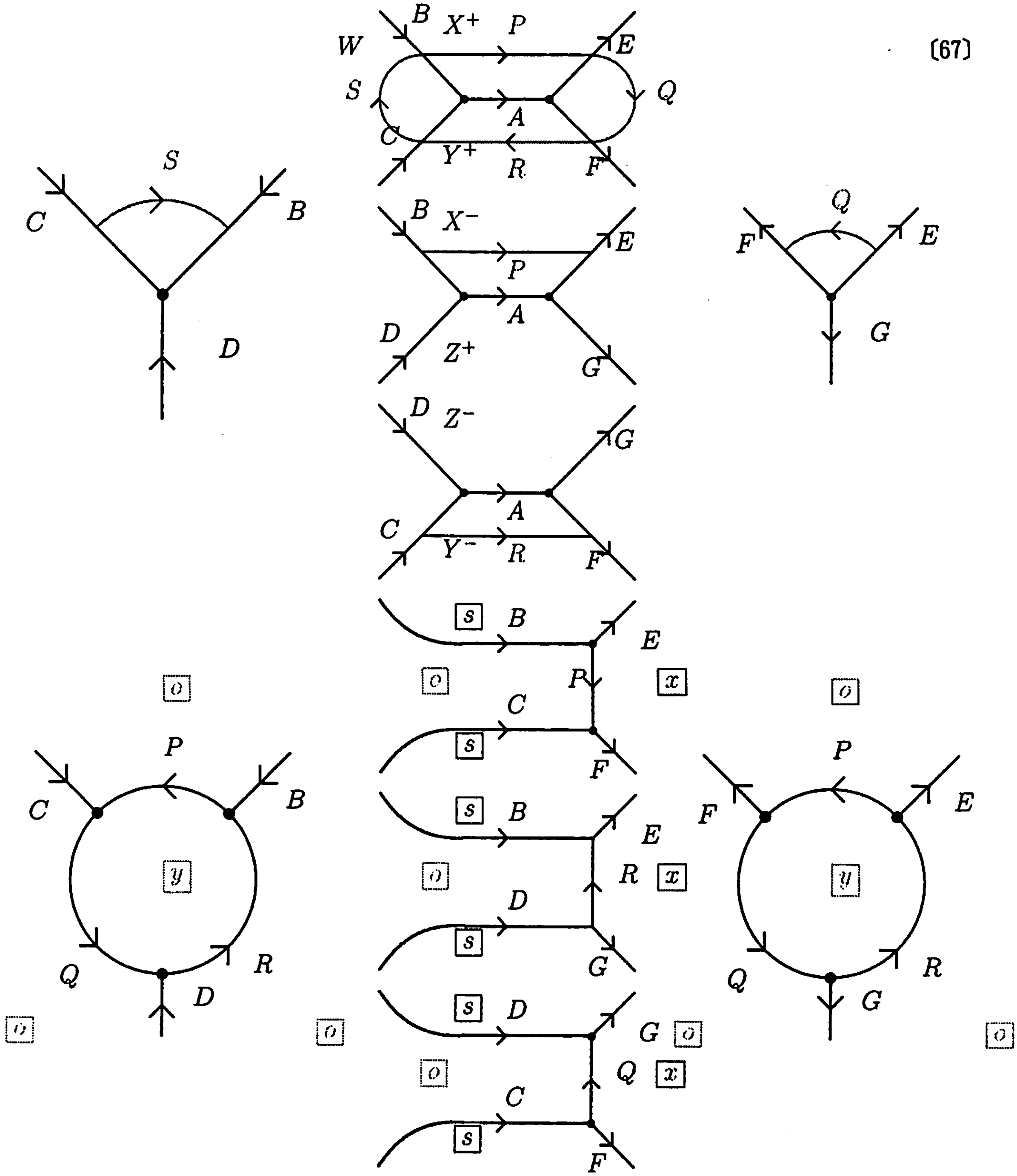


図 10

補題 17 Heegaard splitting において trivial な handle を付け加える変形は，対応する GS の GS 変形で実現できる。

〔68〕

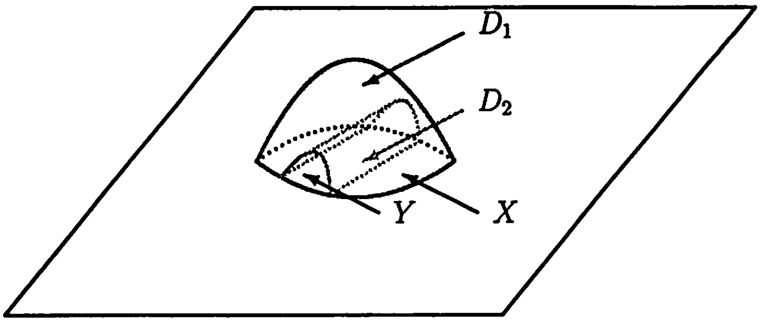


図 11

D_1 でS変形，D_2 でS変形，X でG変形，Y でG変形を実行すればよい。この変形をGS上で見ると図12の様になっている。▮

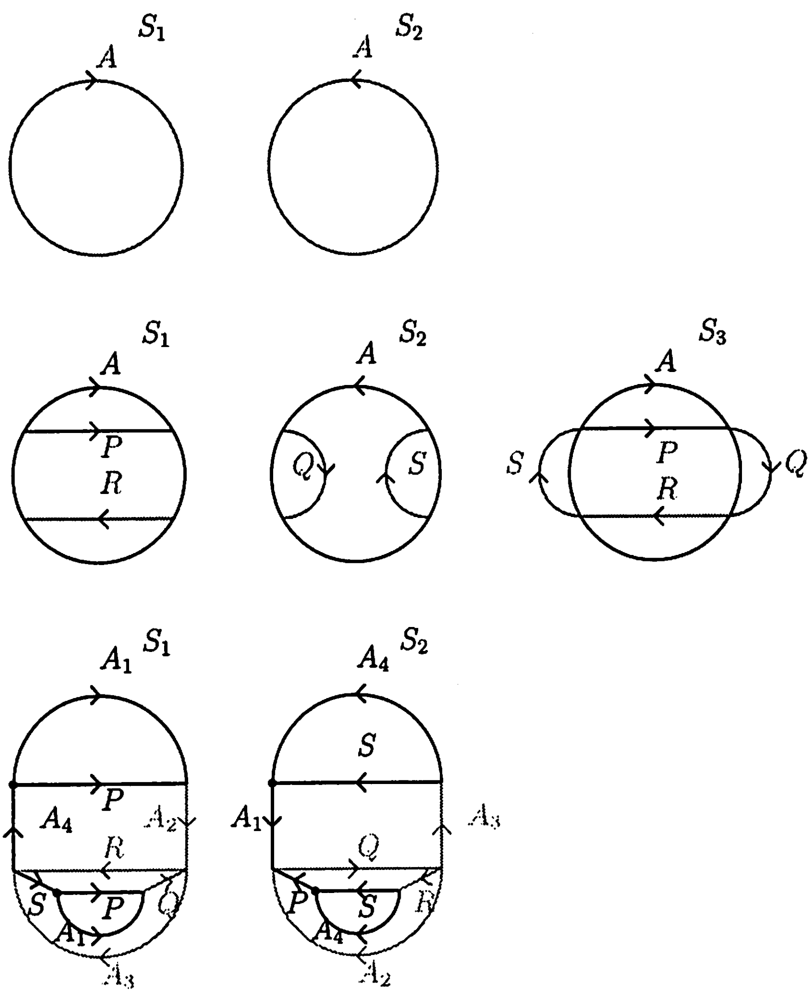


図 12

定理 12 の証明：　最初に GS Σ, Σ' を GS 変形で H 型にする。次に定理 13 と補題 17 を用いて対応する Heegaard splitting が同値になる様に GS 変形をする。Σ に対応する Heegaard diagram を $(H_1, H_2\,;\,\vec{D_1}, \vec{D_2})$，$\Sigma'$ に対応する Heegaard diagram を $(H_1', H_2'\,;\,\vec{D_1'}, \vec{D_2'})$ とする。$F = H_1 \cap H_2$, $F' = H_1' \cap H_2'$ とおくと，2 つの Heegaard diagram が定める Heegaard splitting は同値なので，M 上の同相写像 g が存在して $g(F') = F$ となる。よって Σ' と同値な GS Σ'' が存在して，Σ, Σ'' に対応する Heegaard surface はどちらも F となる。以上より Σ' に対応する Heegaard surface も F とする。

$\vec{D_1}$ と $\vec{D_1'}$，$\vec{D_2}$ と $\vec{D_2'}$ が共に parallel のとき Σ と Σ' は GS 同値である。parallel のとき GS 上では次図のようになっている。

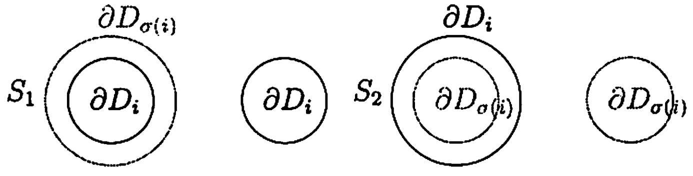


図 13

(1)：$\vec{D_1} \cap \vec{D_1'} = \emptyset$ のとき GS 変形でお互いを pararell にできる事を示す。

parallel な相手を持たない $c' = \partial D_i'$ が存在したとする。S_1 上で c' をみると次図の様になっている。ここで $d_j = D_{\sigma(j)}$ とする。

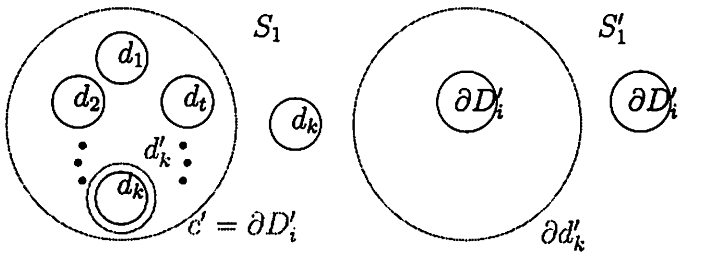


図 14

$i \neq j$ で $\sigma(i) = \sigma(j)$ となるものが存在する d_i, d_j を内側とでも呼んでおこう。内側でない d_i を外側とでも呼ぶ。外側が存在しなければ D_i' で cut すると非連結になるので外側は存在する。すべての外側に対し parallel な相手が存在すればそれらで cut すると非連結になる。よって parallel な相手を持たない外側が存在する。$H_1 - \bigcup_{j \neq i} D_j'$ は連結なので，F 上の loop β で D_i' と 1 点で交わるものが存在する。

このloopがD'_iからでて最後に交わるparallelな相手を持たない外側であるものをd_kとおく。d_kとparallelなdiskをd'_kとする。

S'_1に対し$\partial d'_k$に沿ってS変形を行い，その後$\partial D'_i$に沿ってG変形を行う。S'_1上で$\partial d'_k$は2つのD'_iをseparateしているので可能である。できた新しいGSにおいてはmeridian diskがD'_iからd'_kに変わっていて，平行なdiskが1つ増えている。

(2) $\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2 \neq \emptyset$ のとき：GS変形でintersectionの個数を減らせる事を示せばよい。$\vec{D}_1$上で$\vec{D'_1}$とのintersectionを見る。そのなかでoutermostなものをdとする。$d \subset D_i$, $\partial d \subset D_i \cup D'_j$とする。$\partial d$(の一部のarc)は$D_j$を2つの部分$D'_{j1}$, D'_{j2}に分ける。(これでは不充分。次に変更。$D'_{j1} \cup d$または$D'_{j2} \cup d$の少なくとも一方は$V'_1 - \bigcup_{k \neq j} D'_k$をseparateしない。今それを$D'_{j1}$とする。) ∂dはS'_1を2つの部分に分けるが，もう一方のD'_jを含んでいる方をD'_{j1}とする。

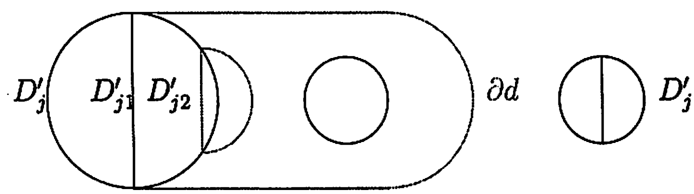


図 15

dをparallelにD'_{j1}の方向に動かしたdiskをd'とする。$\partial d'$に沿ってS変形を行い，その後D'_{j2}に沿ってG変形を行う。∎

参考文献

[1] R. Craggs, A New proof of the Reidemeister– Singer theorem on stable equivalence od Heegaard splittings, proc. AMS ,57 (1976), 143–147

[2] 池田裕司, 横山和夫, 山下正勝, polygramとその基本変形,Theory of Spines of 3–manifolds, 数理解析研究所講究録563(1985)

[3] 河野正晴, 一般化されたDS diagramについて, 箱根セミナー記録2001

[4] 本間龍雄, 組合せ位相幾何学, 共立出版

[5] J. Singer, Three–dimensional manifolds and their Heegaard diagrams, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 88–111

[6] 山下正勝, DS–変形の生成元について, 箱根セミナー記録1998