数学序論追加説明 ♯15

- 名前を非常に乱雑に書いている人が若干いる (「字がきたない」というレベルではない)。名前は必ず「楷書」で書くこと。**そうでない人は減点することにする**。
- グラフが小さい。もっと **大きく** 描くこと。
- なぜそのようなグラフになるか，その根拠を述べること。若干だがグラフのみ描いている人がいた。仮に概形が正しくても採点すれば 0 点である。
- 情報の整合性に注意すること。グラフを描くために色々なことを調べるが，計算間違いをすると，その情報たちが矛盾する場合がある。そのときはどこかで間違いをしていることを意味する。
- 縮尺によっては正確に描くと尖って見える場合もあるが，微分可能な関数のグラフが尖る点をもつことはない。
- グラフの概形は特徴的なところを分かりやすく描いたものなので，概形はマンガだと思って描いた方がよい。

  例えば x 軸になかなか近づかなくても $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$ なら近づいていくように描く。変極点のまわりはそれが分かるように強調して描いた方がグラフの特徴が分かりやすい。
- 問題ではいちいち説明していないが，関数には定義域がある。$\log x$ であれば $x \leq 0$ では定義されていないので，その部分のグラフは当然存在しない。
- 例を考える。$f(x) = x - \sqrt{1+x}$ の概形を描く。
- $\sqrt{x}$ は $x \geq 0$ で定義される。よって $f(x)$ が定義されるためには $1 + x \geq 0$ が必要である。すなわち $y = f(x)$ の定義域は $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ である。
- 増減表を書くため導関数を求め，臨界点を求める。

  $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より臨界点は $x = -\dfrac{3}{4}$ となる。

- 臨界点の前後の導関数の符号を調べる。最初に $-\dfrac{3}{4}$ より小さい点における $f'(x)$ の正負を調べる。$x = -1$ では微分不可能なので $-1 < x < -\dfrac{3}{4}$ となる値で調べる。$x = -\dfrac{7}{8}$ は $-1 < x < -\dfrac{3}{4}$ を満たしている。

$$
\begin{aligned}
f'\left(-\frac{7}{8}\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2}8^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}2\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0
\end{aligned}
$$

$x > -\dfrac{3}{4}$ の場合 $x = 0$ とすると

$$
f'(0) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0
$$

よって増減表は下の様になる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

- x 軸，y 軸との交点を求める。

  y 軸との交点の y 座標は $f(0)$ なので $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。

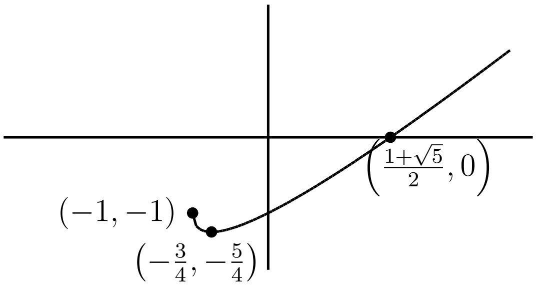
  x 軸との交点の x 座標は $f(x) = 0$ となる x である。一般には複数個ありうる。

  $f(x) = 0$ すると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。ここで $\sqrt{1+x} \geq 0$ より $x \geq 0$ である。両辺を 2 乗して

$$
x^2 = 1 + x
$$

  を得る。この 2 次方程式の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ より $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は不適である。よって x 軸との交点は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

  以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。


$(-1,-1)$
$\left(-\frac{3}{4},-\frac{5}{4}\right)$
$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$