「一変数テイラー展開」一般項の求め方の例

1. テイラー展開の一般項でなく $f^{(n)}(x)$ の形をまず予想する

   例えば $f(x) = \sqrt{1+x}$ の $x = 0$ のおけるテイラー展開は $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$ だが、この係数の並びを見て一般項を推測するのは難しい。$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \cdots$ としても同様である。仮に推測できたとしても、推測が正しくない場合は何項か計算すればわかるので良いが、何項計算しても推測と一致している場合、実際にはすべての項（無限個！）について計算することは出来ないのでいつまでたっても決着がつかない。

   しかし $f^{(n)}(0)$ 達でなく $f^{(n)}(x)$ 達であれば $\frac{df^{(n)}(x)}{dx} = f^{(n+1)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ という関係、すなわち

   $$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},\ f''(x) = \frac{df'(x)}{dx},\ f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx}, \cdots$$

   という関係があるので、順々に計算されていく様子を見れば一般項の予想もしやすいし証明も出来る可能性が高い。以下しばらく $f(x) = \sin x$ の場合を例にとって説明しよう。

2. $f(x) = \sin x$ の場合の $f^{(n)}(0)$ の予想

   $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ のおけるテイラー展開は $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$ である。やはり係数を見ていても予想がつかないが、計算すると

   $$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= -1, \\ f''''(0) &= 0, \\ &\cdots \end{aligned}$$

   となるので

   $$\begin{cases} f^{(2n)}(0) &= 0 \\ f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n \end{cases} \tag{1}$$

   と予想されるが、計算したところまではあてはまっているというだけでは全然根拠にならず、単なる予想に過ぎない。$f^{(2n)}(0)$ および $f^{(2n+1)}(0)$ 達の間に直接的な関係はないので (1) を数学的帰納法で証明するのは無理である。

3. $f(x) = \sin x$ の場合の $f^{(n)}(x)$ の予想

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, \\
f'(x) &= \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x, \\
f''(x) &= \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x, \\
f'''(x) &= \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x, \\
f''''(x) &= \frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x, \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x
\end{aligned}
$$

となると予想される。これを数学的帰納法で証明してみよう。(4 階微分で $\sin x$ に戻った後は本当に同じことの繰り返しであるから、上記の一般項の式は証明するまでもなく正しいことが納得できるが、一般的な $f(x)$ の場合には数学的帰納法で証明してみるのが確実である。)

4. $f(x) = \sin x$ の場合の $f^{(n)}(x)$ の数学的帰納法による証明

$$
\begin{aligned}
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x \\
&\quad (n = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
f^{(2\cdot 0)}(x) &= f(x) = \sin x = (-1)^0 \sin x \\
f^{(2\cdot 0+1)}(x) &= f'(x) = (\sin x)' = \cos x = (-1)^0 \cos x
\end{aligned}
$$

なので $n = 0$ のときは命題が成り立つ。

(b) $n = k$ のとき命題が成り立つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x \\
f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x
\end{aligned}
$$

であるが

$$f^{(2(k+1))}(x) = \frac{d(f^{(2k+1)}(x))}{dx} = \frac{d((-1)^k \cos x)}{dx} = (-1)^{k+1}\sin x$$
$$f^{(2(k+1)+1)}(x) = \frac{d(f^{(2(k+1))}(x))}{dx} = \frac{d((-1)^{k+1} \sin x)}{dx} = (-1)^{k+1}\cos x$$

であるので $\underline{n = k+1\text{ のときも命題が成り立つ}}$。

(a)(b) を合わせると数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$

が成り立つことがわかる。

5. $f^{(n)}(x)$ からテイラー展開の一般項を求める

上式に $x = 0$ を代入すると

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$$
$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$$

となる。一般に

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + (\text{剰余項})$$

であることから

$$\sin x = x + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + (\text{剰余項})$$

となる。

6. $f(x) = \sin x$ の場合の $f^{(n)}(x)$ の別の表し方

等速円運動の速度ベクトルは位置ベクトルを $\frac{\pi}{2}$ 回転したものになることを思い出すと

$$\begin{pmatrix} (\cos x)' \\ (\sin x)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

であるので

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \tag{2}$$

である。美しい式ではあるが、これを見てひとめで

$$
\begin{aligned}
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x
\end{aligned}
$$

であるとわからない人にとってはむしろ有害な式かもしれない。更に (2) に $x=0$ を代入すると

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}$$

となるので

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cdots + \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n + (\text{剰余項})$$

となることになるが、演習「一変数テイラー展開」の問題文にある答の書き方の例はそうなっていないので、これではダメ（間違っているわけでは勿論ない）だということになる。

7. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ の数学的帰納法による証明

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

(a) $\underline{n = 0 \text{ のとき}}$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi \cdot 0}{2}\right)$$

なので $\underline{n = 0 \text{ のときは命題が成り立つ}}$。

(b) $\underline{n = k \text{ のとき命題が成り立つと仮定すると}}$

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

であるが

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \frac{d(f^{(k)}(x))}{dx} = \frac{d\left(\sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)\right)}{dx} &= \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) \\
&= \sin\left(\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \text{であることを用いた}\right) \\
&= \sin\left(x + \frac{\pi(k+1)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

であるので $\underline{n = k + 1 \text{ のときも命題が成り立つ}}$。

(a)(b) を合わせると数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる。

8. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ の数学的帰納法による証明の失敗例その 1

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

(a) $\underline{n = 0 \text{ のとき}}$

$$f^{(0)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi \cdot 0}{2}\right) = \sin x = f(x)$$

なので $\underline{n = 0 \text{ のときは命題が成り立つ}}$。(示すべき $f^{(0)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi \cdot 0}{2}\right)$ を仮定して $f^{(0)}(x) = \sin x$ あるいは $f^{(0)}(x) = f(x)$ を示しても何も言ったことにならない。)

(b) $\underline{n = k \text{ のとき}}$

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

(c) $\underline{n = k + 1 \text{ のとき}}$

$$f^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi(k+1)}{2}\right)$$

(これはおそらく n に $k+1$ を代入した式をただ書いただけであると思われる。勿論それだけでは実質的に何もやっていないので証明になるわけがない。)

(a)(b)(c) を合わせると数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる。

9. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ の数学的帰納法による証明の失敗例その 2

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

(a) $n=0$ のとき

$$f^{(0)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)=\sin x=f(x)$$

なので $n=0$ のときは命題が成り立つ。(示すべき $f^{(0)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)$ を仮定して $f^{(0)}(x)=\sin x$ あるいは $f^{(0)}(x)=f(x)$ を示しても何も言ったことにならない。)

(b) $n=k$ のとき命題が成り立つと仮定すると

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)$$

であるが

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x)&=\sin\left(x+\frac{\pi(k+1)}{2}\right)\\ &=\cos\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)=\frac{d\left(\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)\right)}{dx}\\ &=\frac{d(f^{(k)}(x))}{dx}\end{aligned}$$

であるので $n=k+1$ のときも命題が成り立つ。(示すべき $f^{(k+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi\cdot(k+1)}{2}\right)$ から出発してあたりまえの式 $f^{(k+1)}(x)=\frac{d(f^{(k)}(x))}{dx}$ を結論しても何も言ったことにならない。)

(a)(b) を合わせると数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる。(ダメ！)

10. $f^{(n)}(x)$ の形を予測するのが難しいときの色々な工夫その 1

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{1+x^2},\\ f'(x)&=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\\ f''(x)&=-\frac{2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3},\\ f'''(x)&=\frac{24x}{(1+x^2)^3}-\frac{48x^3}{(1+x^2)^4},\\ f''''(x)&=\frac{24}{(1+x^2)^3}-\frac{288x^2}{(1+x^2)^4}+\frac{384x^4}{(1+x^2)^5},\\ &\cdots\end{aligned}$$

となるが一般項の予想は難しい。

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \\
f'(0) &= 0, \\
\frac{f''(0)}{2} &= -1, \\
\frac{f'''(0)}{3!} &= 0, \\
\frac{f''''(0)}{4!} &= -1, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{cases} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} & = 0 \\ \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} & = (-1)^n \end{cases}$$

と予想されるがこの命題を直接、数学的帰納法にかけるのは無理だろう。($\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ および $\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$ 達の間に直接的な関係がないから。)

ところで

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + R(t) \text{ とおくと } \lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^n} = 0$$

であることは学習ずみである。(テイラー近似の定理を用いてもわかるし、$R(t)$ の形を具体的に計算して直接に極限を計算することもできる。)今 $t = -x^2$ とすると $x \to 0$ のとき $t \to 0$ なので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + R(-x^2), \\
\lim_{x\to 0} \frac{R(-x^2)}{x^{2n}} &= (-1)^n \lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^n} = 0
\end{aligned}$$

となるのでこれが $\frac{1}{1+x^2}$ の $x = 0$ におけるテイラー展開であることがわかる。(テイラー展開の一意性については講義ノートの p.17 を御覧下さい。)

11. $f^{(n)}(x)$ の形を予測するのが難しいときの色々な工夫その２

$\sin x$ の微分は $\cos x$ なので

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (\text{剰余項})$$

の両辺を微分して

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + \cdots + \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} + (\text{剰余項})$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (\text{剰余項})$$

となりそうなものであるが、もう少しちゃんとやると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R(x) \ (\text{ただし} \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0)$$

の両辺を微分して（これをテイラー展開の「項別微分」という）

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R'(x) \tag{3}$$

となり、$R(x)$ の微分 $R'(x)$ が $\lim_{x\to 0} \frac{R'(x)}{x^{2n}} = 0$ を満たすかどうかわからないので (3) が $\cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開になっているかどうかすぐにはわからない。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \ (\text{無限和}) \tag{4}$$

の両辺を微分すれば（これもテイラー展開の「項別微分」という）

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \ (\text{無限和})$$

になりそうな気がするが、実際に無限に足せるわけはなく (4) の実態は

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

であったので、極限をとってから微分したものと微分してから極限を取ったものが同じであることは証明を必要とする。

しかし、実は、ややトリッキーな議論ではあるが、テイラー近似の定理を認めてしまえば何ら実質的な議論をしなくても $\lim_{x\to 0} \frac{R'(x)}{x^{2n+1}} = 0$ であることが言えてしまう。何故なら、f が $(n+2)$ 階連続微分可能とすると

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + R(x) \tag{5}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{n+1}} = 0$$

であるが $(n+1)$ 階連続微分可能函数 f' に同じ定理を適用すると

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{f'''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + S(x)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{x^n} = 0$$

となり (5) の両辺を微分した

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0) + \frac{f''(0)}{2}(2x) + \frac{f'''(0)}{3!}(3x^2) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}(n+1)x^n + R'(x) \\ &= f'(0) + f''(0)x + \frac{f'''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + R'(x) \end{aligned}$$

から $R'(x) = S(x)$ を得るからである。$x = a$ におけるテイラー展開でも同様である。つまりある函数の $x = a$ におけるテイラー展開がわかれば、その函数の導函数や原始函数の $x = a$ におけるテイラー展開もわかってしまう。