1.4 第1節のまとめ

- 角振動数 ω の調和振動であることと $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の重ね合わせであることとは同等である。

- 角振動数 ω の調和振動同士の重ね合わせはまた角振動数 ω の調和振動である。(重ね合わせの原理)

- 角振動数 ω の複素数値調和振動(角振動数 ω の調和振動を実部と虚部に持つ複素平面上の運動)は、角速度 ω の反時計回りの等速円運動 $e^{i\omega t}$ と時計回りの等速円運動 $e^{-i\omega t}$ の複素係数の重ね合わせと同等である。式で書けば、実数の定数 $A_0, \varphi_0, A_1, \varphi_1$ を用いて $\boxed{A_0\sin(\omega t+\varphi_0)+iA_1\sin(\omega t+\varphi_1)}$ の形に書かれることと、複素数の定数 α_0, α_1 を用いて $\boxed{\alpha_0 e^{i\omega t}+\alpha_1 e^{-i\omega t}}$ の形に書かれることとは同等である。

- 上の関係の特別な場合として、実数値の調和振動であること、即ち実数の定数 A, φ を用いて $\boxed{A\sin(\omega t+\varphi)}$ の形に書かれることと複素数の定数 α を用いて $\boxed{\alpha e^{i\omega t}+\bar{\alpha}e^{-i\omega t}}$ の形に書かれることとは同等であり、

$$\boxed{A\sin(\omega t+\varphi)=\alpha e^{i\omega t}+\bar{\alpha}e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \alpha=\frac{A}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\boxed{} \\ \varphi=\arg\alpha+\boxed{} \end{cases}}$$

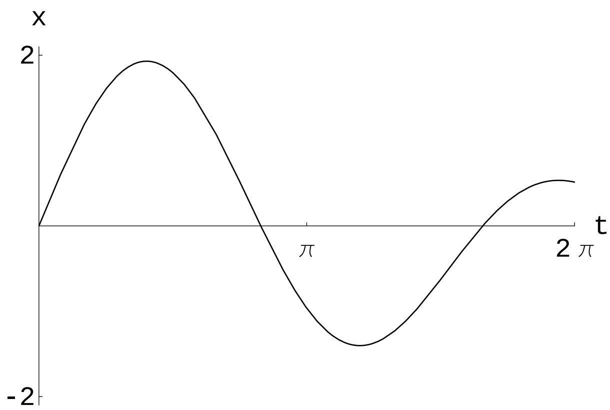
  である。

2 フーリエ級数—高調波との重ね合わせ

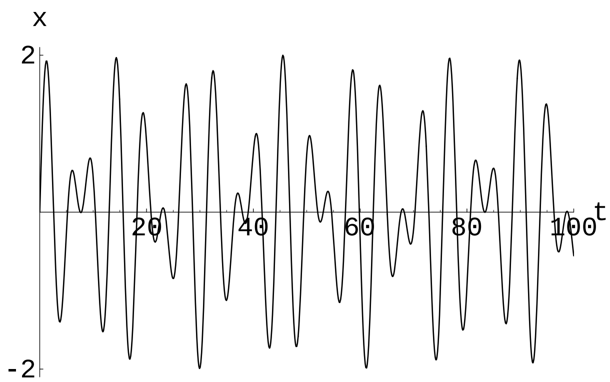
2.1 振動数が異なる調和振動の重ね合わせ

- 振動数が同じ調和振動同士の重ね合わせは位相や振幅が違っても調和振動、即ちサインカーブの波形を持つことを前節で見た。(重ね合わせの原理。)それでは振動数の異なる調和振動を重ね合わせたらどうなるか?

  例えば $x=\sin t+\sin\sqrt{2}t$ のグラフは以下の通り:

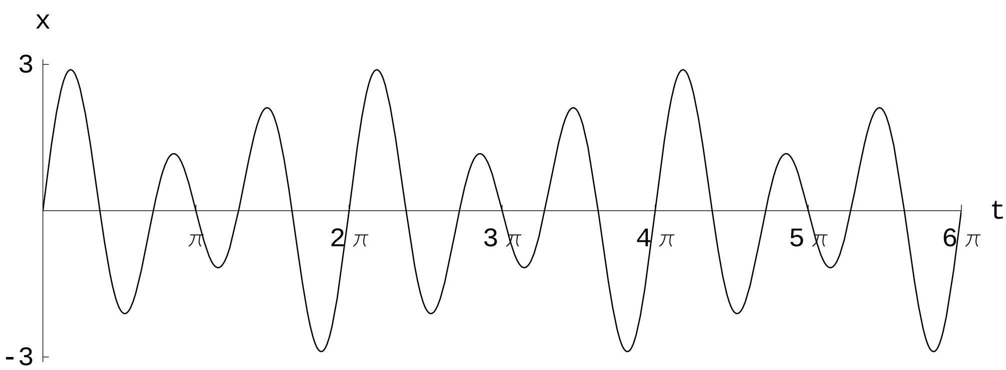


なかなか綺麗な曲線ではあるが、もはやサインカーブではないことが見て取れる。言い換えれば、もはや$\boxed{\text{調和振動ではない}}$。周期性はどうか？　例えば $0 \leq t \leq 100$ の範囲で見ると



となり、この範囲では周期性はないことが見て取れる。実際、有限の長さの周期はないことが証明出来る。

- 上の状況は $\sqrt{2}$ などというひねくれた数を入れたからという面もある。ごく普通に例えば $x = 2\sin 3t + \sin 2t$ というような重ね合わせを考えると



となる。これももはやサインカーブではない (従ってこれも$\boxed{\text{調和振動ではない}}$) が、今度は周期 2π の函数であることが見て取れる。$\sin 3t$ は $\dfrac{2}{3}\pi$ を最短周期

に持つ周期函数だが $\dfrac{2}{3}\pi$ の３倍の 2π も周期であり、$\sin 2t$ は π を最短周期に持つ周期函数だが π の２倍の 2π も周期であるのでそれらを重ね合わせた $2\sin 3t+\sin 2t$ もまた 2π を周期に持つと言う訳である。一方の周期の整数倍ともう一方の周期の整数倍が一致する、という所が本質であるから、

２つの異なる周期の調和振動の重ね合わせは、

周期の比が無理数 $\Rightarrow$ 周期函数でない

周期の比が $\boxed{}$ $\Rightarrow$ 有限の周期を持つ周期函数

ということになる。

2.2　フーリエ級数—高調波との重ね合わせ

- 振動数の異なる２つの調和振動の重ね合わせは、もはや調和振動ではなく波形はサインカーブではなくなるものの、振動数の比が有理数の場合には、重ね合わせは一定の周期と振動数を持った振動—周期的運動—になることを上で見た。このことを逆に見れば、必ずしも調和振動でない振動—これを非調和振動と呼ぼう—が異なる振動数を持つ調和振動達の重ね合わせで表現される場合があることを意味する。前節の例の非調和振動 $2\sin 3t+\sin 2t$ の側から見れば周期 2π の非調和振動がその $\dfrac{1}{3}$ の（最短）周期（３倍の振動数）を持つ調和振動と $\dfrac{1}{2}$ の（最短）周期（２倍の振動数）を持つ調和振動の重ね合わせで表現されたことになる。

- **フーリエ（Jean-Baptiste-Joseph Fourier 1768-1830）の主張**は、

  「およそ**いかなる**波形の振動であろうとその整数倍の振動数を持つ調和振動（サインカーブの波形を持つ振動）の重ね合わせに等しい。」

  というものである。普通の数学の用語で言えば

  「任意の周期函数はフーリエ級数に展開出来る」

  という言い方になる。

- ω の整数倍 ωn $(n=1,2,3,\cdots)$ を角振動数に持つ調和振動は $e^{i\omega nt}$ と $e^{-i\omega nt}$ の重ね合わせで書けるから、上の主張は、$f(t)$ が ω を角振動数に持つ非調和振動、言い換えると $\dfrac{2\pi}{\omega}$ を周期に持つ周期函数であれば、いかなる波形であっても

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\omega nt}+c_{-n}e^{-i\omega nt}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega nt} \tag{5}$$

の形で書けることを意味する。右辺が周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ の**フーリエ級数**である。c_n 達を**フーリエ係数**という。

- フーリエの主張の真偽はさておき、$f(t)$ が ω の整数倍の角振動数を持つ調和振動達の重ね合わせで（(5) のように）書かれるならば、両辺に $e^{-i\omega mt}$ かけてから 1 周期分、例えば 0 から $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ まで（一般に t_0 から $t_0 + T$ まで積分しても結果は同じ）、積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)e^{-i\omega mt}dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}\right) e^{-i\omega mt}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega(n-m)t}dt = \frac{2\pi}{\omega}c_m\end{aligned}$$

なので

$$c_m = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)e^{-i\omega mt}dt$$

である。すなわち、

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt} \Longrightarrow c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)e^{-i\omega nt}dt}$$

である。角振動数 ω を使わずに周期 T を使って書けば

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\boxed{}} \Longrightarrow c_n = \boxed{}\int_0^{T} f(t)e^{\boxed{}}dt}$$

となる。

2.3 フーリエ係数の意味

- c_n は $f(t)$ を調和振動の重ね合わせで表す時の角振動数 ωn の成分の「重み (weight)」を表していると考えられる。

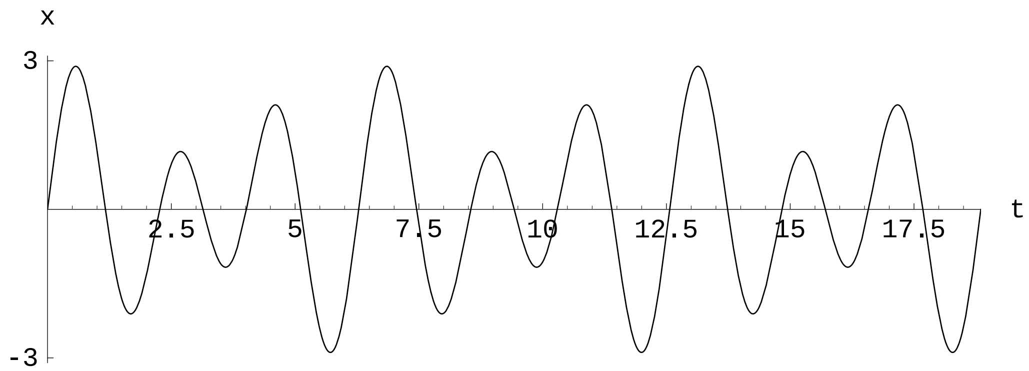
特に $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}$ が実数値函数の時は $c_{-n} = \overline{c_n}$ がすべての n に対し成り立ち、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega nt + \varphi_n)$$

の形で書かれ $A_n = 2|c_n|, \varphi_n = \arg c_n + \frac{\pi}{2}$ である。即ち $f(t)$ を調和振動の重ね合わせで表した時の角振動数 ωn の成分の振幅 A_n と初期位相 φ_n がそれぞれ c_n の $\boxed{}$ の 2 倍と c_n の $\boxed{}$ に $\frac{\pi}{2}$ を足した量になっている。

問題 4 $f(t)$ が一般の複素数値函数のときは c_n と c_{-n} は無関係である。実部の振幅と初期位相 A_n, φ_n, 虚部の振幅と初期位相 B_n, ψ_n を c_n と c_{-n} を用いて表せ。

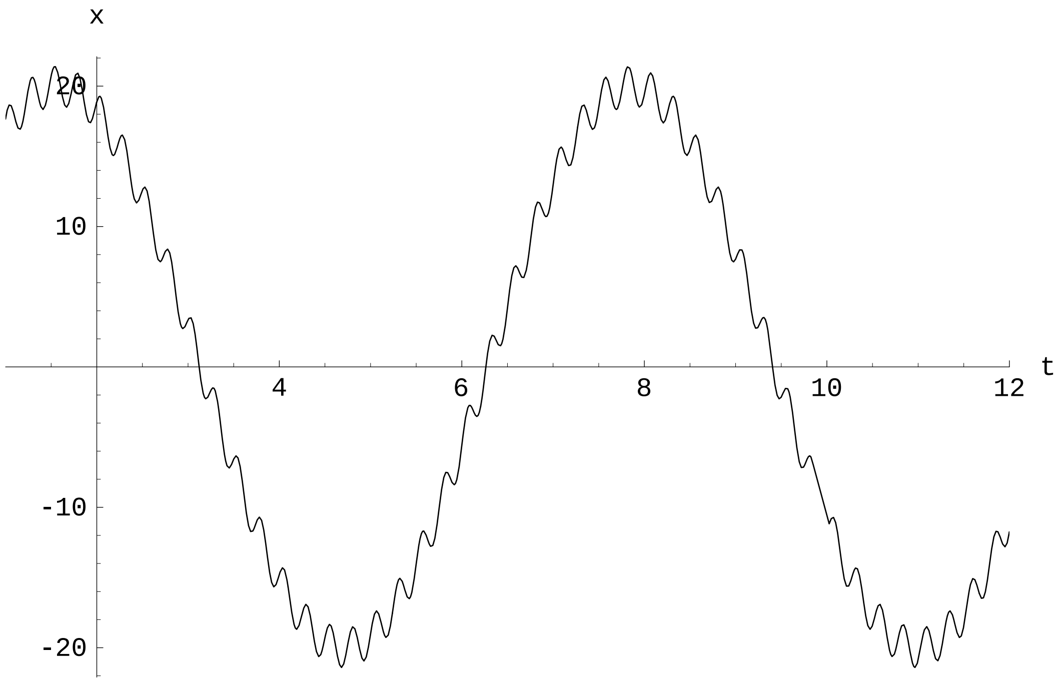
- 例えば



のような電気信号が与えられた時、(オシロスコープなどで見れば) 最短周期 T は約 6.28 であることがわかり、波形のデータから

$$c_n = \frac{1}{6.28}\int_{-\frac{6.28}{2}}^{\frac{6.28}{2}} f(t)e^{-2\pi i n \frac{t}{6.28}}dt$$

達を計算すれば (積分値は数値的なデータから簡単に非常によい近似で計算出来る。この点が応用上重要である。例えばテイラー展開の係数は微分形で表されているので数値データから意味のある値を出すのは非常に難しい。) $n \neq \pm 2, \pm 3$ のときの c_n はほぼ 0 であり、角振動数が基本角振動数 $\dfrac{2\pi}{T}$ の 2 倍と 3 倍の調和振動達の重ね合わせでほぼ書けていることが結論出来るのである。(因みにこれが耳に聞こえる範囲の振動数であれば、ドの音とソの音の和音のように聞こえるはずである。耳 (と脳) はフーリエ解析をしている訳だ。)



のような例だと、周期が長く（即ち角振動数が小さく）振幅の大きいサインカーブ（調和振動）と周期が短く（即ち角振動数が大きく）振幅の小さいサインカーブ（調和振動）との足し算になっていることがすぐ見て取れるが、$T=$ 約 3.14 であることをオシロスコープ等で測定したのち、c_n 達を数値データを元に計算すれば

$$c_n = \begin{cases} 0.50+0.50i \ \ (n=-25) \\ 10i \ \ (n=-1) \\ -10i \ \ (n=1) \\ 0.50-0.50i \ \ (n=25) \\ 0 \ \ (n \neq \pm 1, \pm 25) \end{cases}$$

に近い値がでるはずである。これは

$$f(t) \fallingdotseq (0.50+0.50i)e^{-25i\omega t} + 10ie^{-i\omega t} - 10ie^{i\omega t} + (0.50-0.50i)e^{25i\omega t}$$

であることを意味する。（ただし $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ とする。）サイン・コサインで表せば

$$f(t) \fallingdotseq 20\sin\omega t + 1.0\cdot\cos 25\omega t + 1.0\cdot\sin 25\omega t$$

となり、調和振動の標準形で表せば

$$f(t) \fallingdotseq 20\sin\omega t + 1.4\sin(25\omega t + 0.25\pi)$$

となる。$2|c_1| = 2|-10i = 20 = A_1$, $2|c_{25}| = 2|0.50 - 0.50i| \fallingdotseq 1.4 = A_{25}$, $\arg c_1 + \frac{\pi}{2} = \arg(-10i) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 = \varphi_1$, $\arg c_{25} + \frac{\pi}{2} = \arg(0.50 - 0.50i) + \frac{\pi}{2} = -0.25\pi + \frac{\pi}{2} = 0.25\pi = \varphi_{25}$ であることが確かめられる。

2.4　第2節のまとめ

- 異なる振動数を持つ調和振動同士の重ね合わせは、もはや調和振動ではない。

  振動数の比が有理数なら一定の周期を持つ非調和振動に、無理数なら周期的でない運動になる。

- 与えられた振動数に対し、その整数倍の振動数を持つ調和振動（高調波）達の重ね合わせがフーリエ級数である。

- フーリエの主張は、「任意の周期函数はフーリエ級数に展開出来る」言い換えると「いかなる波形の非調和振動でもその振動数の整数倍の振動数を持つ調和振動（高調波）達の重ね合わせと思える」ということである。

- 実数値周期函数のフーリエ係数 c_n は、その絶対値の2倍が n 番目の高調波の成分の振幅を表し、偏角に $\dfrac{\pi}{2}$ を足した値が初期位相を表している。

- 耳（と脳）は音波のフーリエ係数を知っている。(少なくとも絶対値は。位相の違いまで区別しているかどうか私は知らない。)

- 与えられた信号のフーリエ係数は信号のデータから実際に計算することが出来る。