1　波動方程式の初期値境界値問題

1.1　波動方程式の初期値境界値問題

波動方程式とは以下の偏微分方程式のことである：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

ここで $x,\, t$ は独立変数、$u = u(x,\, t)$ は未知函数、v は定数である。

$u = u(x,\, t)$ はこの他に**境界条件**と呼ばれる

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0 \tag{2}$$

なる条件と、**初期条件**と呼ばれる

$$u(x,\, 0) = \varphi_0(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\, 0) = \varphi_1(x) \tag{4}$$

なる条件とを満たしていると仮定する。（ここで、$\varphi_0,\, \varphi_1$ は与えられた函数である。$\varphi_0(0) = \varphi_0(L) = 0$ を満たすものとする。）これらの条件 (1)〜(4) を併せて「波動方程式の初期値境界値問題」と称する。

1.2　物理的意味

上記 (1)〜(4) の表す現象は一つではなく、色々な物理現象の数学的モデルになっている。この、「一見互いに無関係な現象が全く同じ方程式で記述される」ということが重要なのであるが、ここでは一つの例として、弦の振動の場合を取り上げよう。

両端が固定され、ピーンと張った弦を振動させるとどうなるか？　上記 (1)〜(4) は例えばそういう現象を記述するモデルである。x 軸に沿って弦が張られているとして、両端の位置は $x = 0$ と $x = L$ である。u 軸は x 軸と垂直に交わっているものとして、$u = u(x,\, t)$ は弦が真っ直ぐなときに $x = x,\, u = 0$ の位置にあった点の、時刻 t における u 座標を表す。v は弦の張力と密度とから決まるある定数である。そうすると弦は**波動方程式**(1) に従って運動するというのである。(1) の左辺の $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ は元 x の位置にあった点の時刻 t における加速度の u 成分であり、右辺の $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ はこの点における弦の曲がり方のきつさを表すから、(1) はこの点に弦の曲がり（曲率）に比例した力が働くことを意味する。（そう言われるとそんな気もするであろう。このような事後解釈でなく、力学的な議論により方程式を導き出すことも出来る。）

境界条件(2) は両端が時刻 t に関係なくずっと固定されていることを意味し、**初期条件**(3) は時刻 $t = 0$ における弦の形を、**初期条件**(4) は時刻 $t = 0$ における弦の

上の各点の速度を、それぞれ表している。御存知のように、運動というものは初位置と初速度を与えてやらないと決まらない。φ_0, φ_1 は弦上の各点について初位置と初速度を与えるものである。

1.3　変数分離

$$u(x,\,t) = X(x)T(t) \tag{5}$$

のように $u(x,\,t)$ が x だけの函数（即ち t に依らない函数）$X(x)$ と t だけの函数（即ち x に依らない函数）$T(t)$ の積の形に書けるとき、$u(x,\,t)$ を変数分離型の解という。方程式 (1) に変数分離型の解があるかどうかはわからないが、そのような解があるとしてその形を決定してみよう。

(1) に (5) を代入すると

$$X(x)T''(t) = v^2X''(x)T(t)$$

が得られる。両辺を $v^2X(x)T(t)$ で割ると

$$\frac{T''(t)}{v^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{6}$$

となる。（$X(x)$ や $T(t)$ が 0 になる可能性もあるが恒等的に 0 だと (5) からして $u(x,\,t)$ 自身が恒等的に 0 となって自明な解になってしまうので、$X(x)$ や $T(t)$ は恒等的には 0 でないと考えて良い。従って $X(x)$ や $T(t)$ が 0 でない範囲でまず考えればよい。）

(6) の左辺は t だけの函数、即ち x に依らない函数、或いは x の函数としては定数函数であり、(6) の右辺は x だけの函数、即ち t に依らない函数、或いは t の函数としては定数函数である。それらが等号で結ばれていて同じ函数だというのであるから、結局 x にも t にも依らない函数、或いは $x,\,t$ の函数として定数函数であるということになる。つまり定数である。この定数を c と置けば、

$$\frac{T''(t)}{v^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c \quad (c\text{ は定数})$$

となる。これは

$$T''(t) = cv^2T(t),$$
$$X''(x) = cX(x)$$

なる 2 つの定数係数 2 階線型常微分方程式と同値である。これの解を求めるのは難しくない。(次節参照。)

次に**境界条件**(2) に (5) を代入してみよう。

$$u(0,\,t) = X(0)T(t),$$
$$u(L,\,t) = X(L)T(t)$$

であるから、

$$u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0 \Longleftrightarrow T(t) \equiv 0 \text{ または } X(0) = X(L) = 0$$

である。$T(t) \equiv 0$ のときは $u(x,\,t) \equiv 0$ となってつまらないから、この場合は考えない。そうすると $u(x,\,t) \not\equiv 0$ なる大前提の下では

$$u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0 \Longleftrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

となる。

1.4 常微分方程式の境界値問題

前節の議論により

$$u(x,\,t) = X(x)T(t) \text{ かつ } u(x,\,t) \not\equiv 0$$

なる大前提の下では、**波動方程式**(1)&**境界条件**(2) を満たすことは、

$$T''(t) = cv^2T(t), \tag{7}$$
$$X''(x) = cX(x), \tag{8}$$
$$X(0) = X(L) = 0 \tag{9}$$

を満たすことと同等であることがわかった。今 (7) を解くのは後回しにして、(8) と (9) のみを考えよう。（但し、$X \equiv 0$ のときは $u \equiv 0$ となって大前提に反するので、$X \not\equiv 0$ なる大前提の下で考える。）これらは定数係数２階線型常微分方程式の境界値問題と呼ばれるものの最も簡単な（しかし基本的な）例になっている。$c \neq 0$ ならば

$$X''(x) = cX(x) \Longleftrightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x} \text{（}A,\,B \text{ は定数）} \tag{10}$$

であることは学習済みだろうか？。実際 (10) の $X(x) = Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x}$ の式を $X''(x) = cX(x)$ に代入すれば成り立つことは計算ですぐ確かめられるので「$\Leftarrow$」が成り立つことがわかる。「$\Rightarrow$」が成り立つことは今回の議論では必ずしも必要ないので今は先へ進もう。$c = 0$ の場合はあとで議論することにして、この解を境界条件 (9) に代入すると

$$0 = X(0) = A + B \text{（}A,\,B \text{ は定数）}$$

から

$$B = -A \tag{11}$$

が得られ、

$$0 = X(L) = Ae^{\sqrt{c}L} + Be^{-\sqrt{c}L} \quad (A,\ B \text{ は定数})$$

に (11) を代入すると

$$A\left(e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L}\right) = 0$$

即ち

$$A = 0 \text{ または } e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L} = 0$$

となるが、$A = 0$ とすると $X \equiv 0$ となって大前提に反するので

$$e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L} = 0$$

でなければばならない。両辺に $e^{\sqrt{c}L}$ を掛けると

$$e^{2\sqrt{c}L} - 1 = 0$$

即ち

$$e^{2\sqrt{c}L} = 1$$

となる。ここで $c \geq 0$ とすると $2\sqrt{c}L$ は実数なので $2\sqrt{c}L = 0$ 即ち $c = 0$ この場合は先程同様後回しにしよう。そうすると c が負ということになるが、この場合は $\sqrt{c} = i\sqrt{-c}$ で、

$$e^{2\sqrt{c}L} = 1 \Leftrightarrow e^{2i\sqrt{-c}L} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{-c}L = 2\pi n \quad (n \text{ は任意の整数})$$

となり、

$$c = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \quad (n \text{ は任意の整数})$$

となる。今 $c \neq 0$ であり、また、n は n^2 の形でのみ含まれているので、

$$c = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

でよい。これと (11) とを (10) で得られた解の式に代入すると

$$X(x) = A\left(e^{i\frac{\pi n x}{L}} - e^{-i\frac{\pi n x}{L}}\right) \quad (A \text{ は定数})$$

となるが、

$$e^{\pm i\frac{\pi n x}{L}} = \cos\frac{\pi n x}{L} \pm i\sin\frac{\pi n x}{L}$$

であること（Euler の公式！）を用いると

$$X(x) = 2Ai\sin\frac{\pi n x}{L} \quad (A \text{ は定数})$$

となるので、$2Ai$ を C_1 と置くと

$$X(x) = C_1 \sin \frac{\pi n x}{L} \quad (C_1 \text{ は定数})$$

が求める答である。

ここで、後回しにした $c = 0$ の場合を考えよう。(8) は

$$X''(x) = 0$$

になり「$X(x)$ は 1 次函数」というのが答になるが、境界条件

$$X(0) = X(L) = 0$$

も考慮すると $X \equiv 0$ となって大前提に反してしまう。従って、$c = 0$ の場合は除外される。まとめると、$X \not\equiv 0$ の大前提の下、

$$\begin{cases} X''(x) = cX(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ X(x) = C_1 \sin \frac{\pi n x}{L} \quad (C_1 \text{ は定数}) \end{cases}$$

が成り立つ。定数 c が境界条件から必然的に特定の値に制限されてしまうところを鑑賞してほしい。（２階微分のオペレータの固有値になっている。）

1.5 波動方程式の変数分離解

さて、後回しにした $T(t)$ の満たすべき方程式 (7) に前節で求めた c の値を代入すると

$$T''(t) = -v^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 T(t)$$

となるので、これを解くと、$X(x)$ の時と同様に

$$T(t) = C_2 e^{iv\frac{\pi n}{L}t} + C_3 e^{-iv\frac{\pi n}{L}t} \quad (C_2,\, C_3 \text{ は定数})$$

従って

$$T(t) = C_4 \cos \pi n \frac{v}{L} t + C_5 \sin \pi n \frac{v}{L} t \quad (C_4,\, C_5 \text{ は定数})$$

となる。この $T(t)$ と前節で求めた $X(x)$ とを (5) に代入すると

$$u = C_1 \sin \pi n \frac{x}{L} \left(C_4 \cos \pi n \frac{v}{L} t + C_5 \sin \pi n \frac{v}{L} t \right)$$

となる。C_1, C_4, C_5 は任意定数だから $C_1 C_4 = C_6$, $C_1 C_5 = C_7$ と置くと、結局

$$u = \sin \pi n \frac{x}{L} \left(C_6 \cos \pi n \frac{v}{L} t + C_7 \sin \pi n \frac{v}{L} t \right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が、**波動方程式**(1)&**境界条件**(2) を満たす変数分離解として得られたことになる。

1.6 重ね合わせの原理

ところで、**波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

も**境界条件**

$$u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0 \tag{2}$$

も線型の条件なので、両方を満たす函数全体のなす集合

$$V = \left\{ u \,\middle|\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\, u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0 \right\}$$

はベクトル空間をなす。即ち、

$$u_1,\, u_2 \in V \Longrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in V$$

が成り立つ。言い換えると、$u_1,\, u_2$ が共に波動方程式と境界条件を満たすならば、その任意の線型結合 $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ （但し $\lambda_1,\, \lambda_2$ は定数）もまた同じ波動方程式と境界条件を満たす。この事実を**「重ね合わせの原理」**という。

今、

$$u = \sin \pi n \frac{x}{L} \cos \pi n \frac{v}{L} t,\, \sin \pi n \frac{x}{L} \sin \pi n \frac{v}{L} t \;\; (n = 1,\, 2,\, 3, \cdots)$$

は V の元なので、これらを重ね合わせた（即ちこれらの線型結合であるところの）

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \pi n \frac{x}{L} \cos \pi n \frac{v}{L} t + b_n \sin \pi n \frac{x}{L} \sin \pi n \frac{v}{L} t \right) \tag{12}$$

もまた V の元である。(無限個足しても本当に V の元になるのか、そもそも無限和は収束するのか、どういう意味での収束か、といった問題はあるが、今は目をつぶることにする。）これが**初期条件**

$$u(x,\,0) = \varphi_0(x), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0) = \varphi_1(x) \tag{4}$$

を満たすように $a_n,\, b_n \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が決められれば、それで波動方程式の初期値境界値問題の解が作れたことになる。(12) を (3) に代入すると

$$\varphi_0(x) = u(x,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{L}$$

となる。第三辺は所謂正弦級数で周期 $2L$ の奇函数のフーリエ級数である。（コサインの部分の係数は偶函数のパートなので消えている。）両辺に $\sin \frac{\pi n x}{L}$ を掛けて 0 から L まで積分することにより、(項別積分が出来るとして)

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \tag{13}$$

を得る。また、無限級数 (12) の項別微分が許されると仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n v}{L} \left(-a_n \sin \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi n v t}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n v t}{L} \right)$$

であるから、(12) を (4) に代入して

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n v}{L} b_n \sin \frac{\pi n x}{L}$$

を得る。上と同様にすると

$$b_n = \frac{2}{\pi n v} \int_0^L \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \tag{14}$$

を得る。

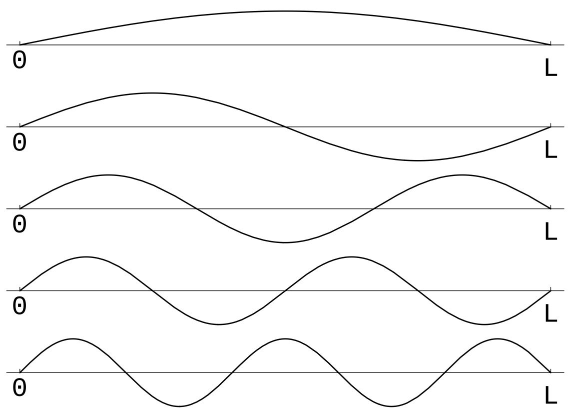
まとめると、与えられた初期値 φ_0, φ_1 に対して、(13) で a_n を定め、(14) で b_n を定めて、それらを (12) に代入すると、波動方程式の初期値境界値問題 (1)〜(4) の解が得られる。これをフーリエの方法という。一応はこれで解らしきものが作れたわけであるが、フーリエ級数の収束の問題、再現性の問題、項別微分・項別積分の問題など数学的には解決すべき色々な問題を含んでいる。

1.7 解の物理的解釈

得られた解の公式が複雑すぎて、ちっとも解がわかった気がしないかも知れないが、初期条件としては任意の函数、従ってどんな訳の分からない函数を与えることもできるのであるから、解がすぐにどんな函数かわかるような形の式で表されるはずもないのである。$a_n,\, b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は初期条件の与え方によってどんな値でも取りうるのであるから、その部分は放って置いて V の「基底」であるところの

$$\sin \pi n \frac{x}{L} \cos \pi n \frac{v}{L} t,\ \sin \pi n \frac{x}{L} \sin \pi n \frac{v}{L} t\ \ (n = 1,\, 2,\, 3, \cdots)$$

に着目し、これを弦の運動と解釈したときにどうなるか考えてみよう。$\sin \pi n \frac{x}{L} \cos \pi n \frac{v}{L} t$ 及び $\sin \pi n \frac{x}{L} \sin \pi n \frac{v}{L} t$ は x を固定して t の函数として見ると、位相 (phase) が違うだけで同じ周期 $\frac{2L}{vn}$ の単振動をしている。この２つの重ね合わせによって周期 $\frac{2L}{vn}$ の単振動であって任意の位相のものが得られる訳である。$\sin \pi n \frac{x}{L}$ の部分は弦の形を表している。弦はこの形のまま、上下に伸び縮みして周期 $\frac{2L}{vn}$ の単振動をする訳である。どんな変な形から出発したどんな変な振動でもこのような基本的な均整の取れた形の振動（所謂「固有振動」）の重ね合わせで書ける、ということは大変美しい結果であると思う。


0
L
0
L
0
L
0
L
0
L