

目 次

1	1 次近似—1 次函数による近似	1
1.1	最初の例	1
1.1.1	例	1
1.1.2	数値実験	1
1.1.3	幾何学的側面	1
1.2	一般の多項式の 1 次近似	2
1.2.1	例	2
1.2.2	数値実験	3
1.2.3	幾何学的側面	3
1.3	近似と極限	4
1.3.1	例	4
1.3.2	例	4
1.4	一般の函数の 1 次近似	4
1.4.1	例	5
1.4.2	一般の場合—微分係数	6
1.5	第 1 節のまとめ	8

1 1 次近似—1 次函数による近似

1.1 最初の例

1.1.1 例

$$f(x) = x^2 \quad (1)$$

について考えよう。 x を

$$x = 1 + (x - 1) \quad (2)$$

のように 1 と $x - 1$ の和に分けて、(1) に代入して展開すると、

$$f(x) = x^2 = \{1 + (x - 1)\}^2 = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 \quad (3)$$

となる。

今、 x の値が非常に 1 に近い時、言い換えると $x - 1$ の絶対値が非常に小さいときを考えよう。この時、 $2(x - 1)$ の絶対値もまた非常に小さいが、 $(x - 1)^2$ の絶対値は、小さいもの同士を掛け算しているので、 $2(x - 1)$ の絶対値よりもまた更に（桁違いに）小さい。従って、 x の値が非常に 1 に近い時には、 $(x - 1)^2$ の部分を取り去った

$$1 + 2(x - 1) \quad (4)$$

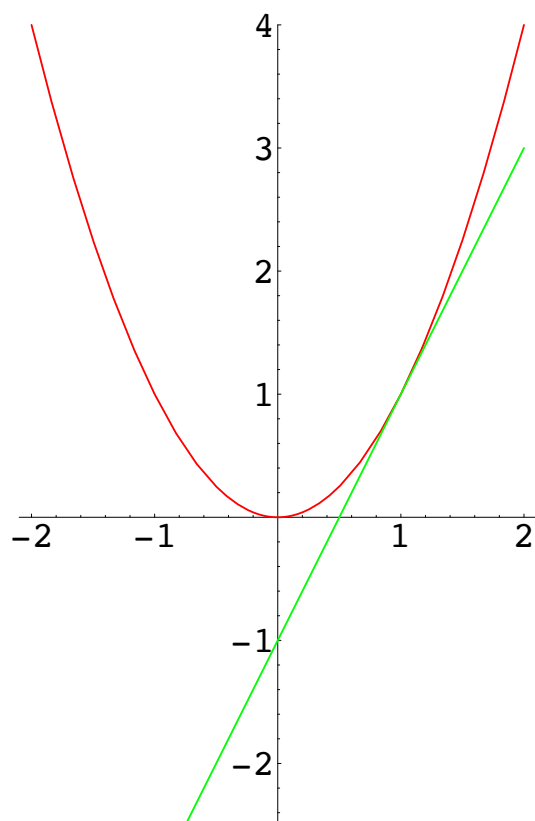
で元の 2 次函数 $f(x) = x^2$ を近似するのは有効であると考えられる。こういう操作を「 $1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2$ の $(x - 1)^2$ の部分を『無視する』(neglect、ネグる)」と言い、「 $2(x - 1)$ と較べて $(x - 1)^2$ は『無視できる』(negligible、ネグれる)」と言う。

1.1.2 数値実験

x	1	...	1.001	...	1.01	...	1.1
真の値 x^2	1	...	1.002001	...	1.0201	...	1.21
近似値 $1 + 2(x - 1)$	1	...		...		...	
誤差 $x^2 - \{1 + 2(x - 1)\} (= (x - 1)^2)$	0	...		...		...	
$ 2(x - 1) $ と較べて	0	...		...		...	
$ (x - 1)^2 $ は桁違いに小さい	0	...		...		...	

1.1.3 幾何学的側面

元の函数 $f(x) = x^2$ のグラフ $y = x^2$ と、それを近似する 1 次函数 $1 + 2(x - 1)$ のグラフ $y = 1 + 2(x - 1)$ を同じ xy -平面上に描いてみよう：



つまり、函数 $f(x) = x^2$ を近似する 1 次函数 $1 + 2(x - 1)$ のグラフ $y = 1 + 2(x - 1)$ （直線）は元の函数 $f(x) = x^2$ のグラフ $y = x^2$ （放物線）と $x = 1$ で接している。 $x = 1$ の近くでは二つの函数の値が非常に近い、ということが幾何学的には「2つの函数のグラフが接している」ということに対応しているわけである。

1.2 一般の多項式の 1 次近似

同じようにすれば、多項式である限りどんな $f(x)$ が与えられてもそれを与えられた点の近くで近似する 1 次函数を求めることが出来る。例えば、

1.2.1 例

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 20 \quad (5)$$

を $x = 2$ の近くで近似する 1 次函数を求めるには、 x を

$$x = 2 + (x - 2) \quad (6)$$

のように 2 と $x - 2$ の和に分けて、(5) に代入して展開すればよい：

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 20 \quad (7)$$

$$= 8 + 52(x - 2) + 35(x - 2)^2 + 10(x - 2)^3 + (x - 2)^4 \quad (8)$$

$$= 8 + 52(x - 2) + \text{誤差項} \quad (9)$$

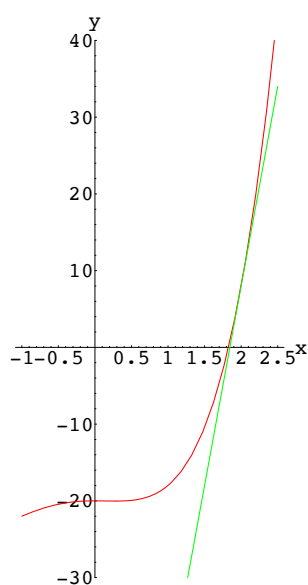
となる。 x の値が非常に 2 に近い時、言い換えると $x - 2$ の絶対値が非常に小さい時、 $52(x - 2)$ の絶対値もまた非常に小さいが、 $(x - 2)^2$ の絶対値は $52(x - 2)$ の絶対値よりも桁違いに小さく、 $(x - 2)^3$ の絶対値はそれよりまた更に桁違いに小さく、 $(x - 2)^4$ の絶対値はそれよりまた更に桁違いに小さいので、35 倍しようと 10 倍しようと、またそれら 3 つの項を足し合わせようと、矢張り桁違いに小さいわけである。

1.2.2 数値実験

x	2	...	2.0001	...	2.001	...	2.01
真の値 $f(x)$	8	...	8.0052003500100001	...	8.052035010001	...	8.52351001
近似値 $8 + 52(x - 2)$	8	...		...		...	
誤差	0	...		...		...	
$35(x - 2)^2$	0	...		...		...	
$10(x - 2)^3$	0	...		...		...	
$(x - 2)^4$	0	...		...		...	

1.2.3 幾何学的側面

元の函数 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 20$ のグラフ $y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 20$ と、それを近似する 1 次函数 $8 + 52(x - 2)$ のグラフ $y = 8 + 52(x - 2)$ を同じ xy -平面上に描いてみよう：



1.3 近似と極限

上の2つの例の数値計算により、与えられた点 $x = a$ (1.1.2 節の場合 $a = 1$ 、1.2.2 節の場合 $a = 2$) の近くでの1次近似の誤差項の絶対値は、 x が a に近いとき $|x - a|$ の値と比べて小さく、 x が a に近ければ近いほど $|x - a|$ の値と比べてより（桁違いに）小さいことが観察された。このことを数学的には

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0 \quad (10)$$

と定式化し、「 $x \rightarrow a$ のとき $x - a$ と比べて(誤差項)は無視出来る」と言う。このことを上の2つの例で確認してみよう。

1.3.1 例

x が1に近い時 x^2 を1次関数 $1 + 2(x - 1)$ で近似する式は

$$x^2 = 1 + 2(x - 1) + (\text{誤差項})$$

と書かれる。このとき

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \square$$

1.3.2 例

x が2に近い時 $x^4 + 2x^3 - x^2 - 20$ を1次関数 $8 + 52(x - 2)$ で近似する式は

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 20 = 8 + 52(x - 2) + (\text{誤差項})$$

と書かれる。このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\text{誤差項})}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{35(x - 2)^2 + 10(x - 2)^3 + (x - 2)^4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ 35(x - 2) + 10(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \right\} = \square \end{aligned}$$

1.4 一般の関数の1次近似

それでは与えられた関数 $f(x)$ が多項式でない場合、与えられた点 $x = a$ の近くで $f(x)$ を近似する1次関数はどうやって求めたらよいだろうか？

1.4.1 例

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (11)$$

について考えよう。今度は x に $x = 1 + (x - 1)$ を代入しても

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x - 1)} \quad (12)$$

となるだけで、どうやって展開したらいいのかわからない。ともかく

$$\frac{1}{x} = f(x) = (\text{1 次関数}) + (\text{誤差項}) = A + B(x - 1) + (\text{誤差項}) \quad (13)$$

の形で $f(x) = \frac{1}{x}$ が 1 次関数 $A + B(x - 1)$ で近似出来る、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = 0 \quad (14)$$

であると仮定して、定数 A, B を決定してみよう。まず (14) から特に

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\text{誤差項}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \square$$

であることに注意する。 $(x - 1)$ が 0 に近づく時 $|x - 1|$ より絶対値がはるかに小さいはずの (誤差項) が 0 に近づくのは当然である。) 従って $x \rightarrow 1$ の時の (13) の両辺の極限を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (\text{左辺}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \square \\ \lim_{x \rightarrow 1} (\text{右辺}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \{A + B(x - 1) + (\text{誤差項})\} = A + B \cdot 0 + \lim_{x \rightarrow 1} (\text{誤差項}) = A \end{aligned}$$

即ち $A = \square$ でなければならないことが分かる。これを (13) に代入すれば

$$\frac{1}{x} = 1 + B(x - 1) + (\text{誤差項})$$

これを B について解いた形にすると

$$B = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1}$$

だから $x \rightarrow 1$ の時の両辺の極限を取ると

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} \right) = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = -1 + 0 = -1$$

即ち $B = -1$ でなければならないことが分かる。逆に

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + \varepsilon(x)$$

で $\varepsilon(x)$ を定義すれば

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varepsilon(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1 + (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \square$$

即ち、 $\frac{1}{x}$ の $x \rightarrow 1$ のときの 1 次近似は $1 - (x - 1)$ であり、 $\varepsilon(x)$ はその誤差項であると言える。

1.4.2 一般の場合—微分係数

$f(x)$ が多項式とも $\frac{1}{x}$ とも限らない、一般の連続函数の場合も同様に、以下のように定義する：

定義 1 (1 次近似). 与えられた連続函数 $f(x)$ に対して、 $A + B(x - a)$ が $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の 1 次近似であるとは

$$f(x) = A + B(x - a) + (\text{誤差項})$$

とおくとき、 $x \rightarrow a$ のとき $|x - a|$ と比べて (誤差項) の絶対値が無視出来るほど小さい、即ち

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0$$

であることを言う。(定義 1 終)

与えられた連続函数 $f(x)$ と与えられた点 $x = a$ に対して定数 A, B が存在して

$$f(x) = A + B(x - a) + (\text{誤差項}) \quad (15)$$

かつ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0 \quad (16)$$

であると仮定しよう。このとき、上の場合と同様

$$\lim_{x \rightarrow a} (\text{誤差項}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{A + B(x - a) + (\text{誤差項})\} = A + B \cdot 0 + \lim_{x \rightarrow a} (\text{誤差項}) = A$$

であるが、 $f(x)$ が $x = a$ で連続ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ だから $A = f(a)$ でなければならない。これを (15) に代入すると

$$f(x) = f(a) + B(x - a) + (\text{誤差項})$$

となり、 B について解いた形にすると

$$B = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{(\text{誤差項})}{x - a}$$

となる。両辺の $x \rightarrow a$ のときの極限を考えると

$$B = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

でなければならない。

定義 2 (微分可能・微分係数). $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在する時、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であると言い、この極限値を $f'(a)$ と書いて $f(x)$ の $x = a$ における微分係数と言う。即ち、

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

である。(定義 2 終)

注 1. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ は x が a から x まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率であり、 x が a に近づくときの平均変化率の極限は $x = a$ の瞬間の $f(x)$ の変化率を表すのであった。

注 2. $x = a + h$ とおけば $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ であるから

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

と定義しても良い。こちらの方が見覚えのある人が多いかも知れない。出来れば両方の形に慣れていただきたい。

つまり $A + B(x - a)$ が与えられた連続関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ のときの 1 次近似であると仮定すると、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であって $A = f(a)$, $B = f'(a)$ であることが言えた訳である。

逆に $A = f(a)$, $B = f'(a)$ であると仮定すると $A + B(x - a)$ が $f(x)$ の $x \rightarrow a$ のときの 1 次近似であることを示そう。それは言い換えると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$$

ということだが、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x) \Rightarrow \frac{R(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

$$\text{だから } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

以上を命題の形でまとめると次のようになる：

命題 1. 与えられた連続関数 $f(x)$ に対して

$$A + B(x - a) \text{ が } f(x) \text{ の } x \rightarrow a \text{ のときの 1 次近似} \Leftrightarrow f(x) \text{ は } x = a \text{ で微分可能で} \begin{cases} A = f(a) \\ B = f'(a) \end{cases}$$

(命題 1 終)

「 $\Leftarrow$ 」を別の言い方で言うと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x) \text{ と置くとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$$

注 3. これはあとで n 次近似まで一般化される。「 $\Rightarrow$ 」は $n \geq 2$ では成り立たないが、「 a に関し局所一様に n 次近似可能 $\Leftrightarrow n$ 階連続微分可能」の形にすれば成り立つ。

1.5 第1節のまとめ

- 与えられた函数を与えられた点の近くで近似する1次函数が存在することを数値実験で観察した。
- 与えられた点の近くでの1次近似が存在することとその点で微分可能であることは、同等である。
- $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、1次函数 $f(a) + f'(a)(x - a)$ が $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の1次近似である：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x) \text{ と置くとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$$

これを

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$$

と書くこともある。