目次

1　1次近似—1次函数による近似

1.1　最初の例

1.1.1　例

$$f(x) = x^2 \tag{1}$$

について考えよう。x を

$$x = 1 + (x - 1) \tag{2}$$

のように 1 と $x-1$ の和に分けて、(1) に代入して展開すると、

$$f(x) = x^2 = \{1 + (x-1)\}^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \tag{3}$$

となる。

今、x の値が非常に 1 に近い時、言い換えると $x-1$ の絶対値が非常に小さいときを考えよう。この時、$2(x-1)$ の絶対値もまた非常に小さいが、$(x-1)^2$ の絶対値は、小さいもの同士を掛け算しているので、$2(x-1)$ の絶対値よりもまた更に（桁違いに）小さい。従って、x の値が非常に 1 に近い時には、$(x-1)^2$ の部分を取り去った

$$1 + 2(x-1) \tag{4}$$

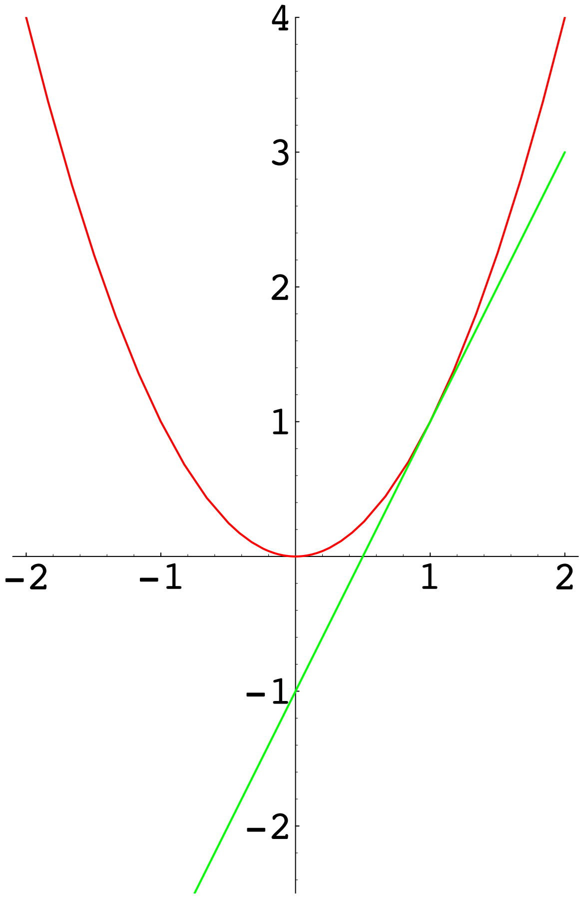
で元の 2 次函数 $f(x) = x^2$ を近似するのは有効であると考えられる。こういう操作を「$1 + 2(x-1) + (x-1)^2$ の $(x-1)^2$ の部分を『無視する』(neglect、ネグる)」と言い、「$2(x-1)$ と較べて $(x-1)^2$ は『無視できる』(negligible、ネグれる)」と言う。

1.1.2　数値実験

x	1	$\cdots$	1.001	$\cdots$	1.01	$\cdots$	1.1
真の値 x^2	1	$\cdots$	1.002001	$\cdots$	1.0201	$\cdots$	1.21
近似値 $1 + 2(x-1)$	1	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
誤差 $x^2 - \{1 + 2(x-1)\}\ \left(= (x-1)^2\right)$	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$\lvert 2(x-1)\rvert$ と較べて	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$\lvert (x-1)^2\rvert$ は桁違いに小さい	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

1.1.3　幾何学的側面

元の函数 $f(x) = x^2$ のグラフ $y = x^2$ と、それを近似する 1 次函数 $1{+}2(x{-}1)$ のグラフ $y = 1{+}2(x{-}1)$ を同じ xy-平面上に描いてみよう：



つまり、函数 $f(x) = x^2$ を近似する 1 次函数 $1 + 2(x - 1)$ のグラフ $y = 1 + 2(x - 1)$ （直線）は元の函数 $f(x) = x^2$ のグラフ $y = x^2$ （放物線）と $x = 1$ で接している。$x = 1$ の近くでは二つの函数の値が非常に近い、ということが幾何学的には「2 つの函数のグラフが接している」ということに対応しているわけである。

1.2　一般の多項式の 1 次近似

同じようにすれば、多項式である限りどんな $f(x)$ が与えられてもそれを与えられた点の近くで近似する 1 次函数を求めることが出来る。例えば、

1.2.1　例

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 20 \tag{5}$$

を $x = 2$ の近くで近似する 1 次函数を求めるには、x を

$$x = 2 + (x - 2) \tag{6}$$

のように 2 と $x-2$ の和に分けて、(5) に代入して展開すればよい：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4+2x^3-x^2-20 && (7)\\
&= 8+52(x-2)+35(x-2)^2+10(x-2)^3+(x-2)^4 && (8)\\
&= 8+52(x-2)+\text{誤差項} && (9)
\end{aligned}
$$

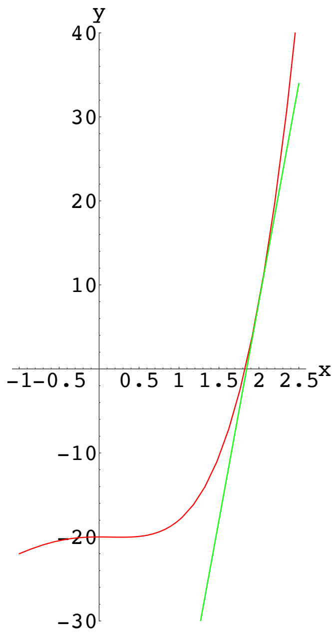
となる。x の値が非常に 2 に近い時、言い換えると $x-2$ の絶対値が非常に小さい時、$52(x-2)$ の絶対値もまた非常に小さいが、$(x-2)^2$ の絶対値は $52(x-2)$ の絶対値よりも桁違いに小さく、$(x-2)^3$ の絶対値はそれよりまた更に桁違いに小さく、$(x-2)^4$ の絶対値はそれよりまた更に桁違いに小さいので、35 倍しようと 10 倍しようと、またそれら 3 つの項を足し合わせようと、矢張り桁違いに小さいわけである。

1.2.2 数値実験

x	2	$\cdots$	2.0001	$\cdots$	2.001	$\cdots$	2.01
真の値 $f(x)$	8	$\cdots$	8.0052003500100001	$\cdots$	8.052035010001	$\cdots$	8.52351001
近似値 $8+52(x-2)$	8	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
誤差	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$35(x-2)^2$	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$10(x-2)^3$	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
$(x-2)^4$	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

1.2.3 幾何学的側面

元の函数 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-20$ のグラフ $y=x^4+2x^3-x^2-20$ と、それを近似する 1 次函数 $8+52(x-2)$ のグラフ $y=8+52(x-2)$ を同じ xy-平面上に描いてみよう：



1.3　近似と極限

上の２つの例の数値計算により、与えられた点 $x = a$（1.1.2 節の場合 $a = 1$、1.2.2 節の場合 $a = 2$）の近くでの１次近似の誤差項の絶対値は、x が a に近いとき $|x - a|$ の値と比べて小さく、x が a に近ければ近いほど $|x - a|$ の値と比べてより（桁違いに）小さいことが観察された。このことを数学的には

$$\lim_{x \to a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0 \tag{10}$$

と定式化し、「$x \to a$ のとき $x - a$ と比べて(誤差項)は無視出来る」と言う。このことを上の２つの例で確認してみよう。

1.3.1　例

x が 1 に近い時 x^2 を 1 次函数 $1 + 2(x - 1)$ で近似する式は

$$x^2 = 1 + 2(x - 1) + (\text{誤差項})$$

と書かれる。このとき

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x - 1) = \boxed{}$$

1.3.2　例

x が 2 に近い時 $x^4 + 2x^3 - x^2 - 20$ を 1 次函数 $8 + 52(x - 2)$ で近似する式は

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 20 = 8 + 52(x - 2) + (\text{誤差項})$$

と書かれる。このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{(\text{誤差項})}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{35(x-2)^2+10(x-2)^3+(x-2)^4}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\left\{35(x-2)+10(x-2)^2+(x-2)^3\right\} = \boxed{}\end{aligned}$$

1.4　一般の函数の 1 次近似

それでは与えられた函数 $f(x)$ が多項式でない場合、与えられた点 $x=a$ の近くで $f(x)$ を近似する 1 次函数はどうやって求めたらよいだろうか？

1.4.1　例

$$f(x)=\frac{1}{x} \tag{11}$$

について考えよう。今度は x に $x=1+(x-1)$ を代入しても

$$f(x)=\frac{1}{1+(x-1)} \tag{12}$$

となるだけで、どうやって展開したらいいのかわからない。ともかく

$$\frac{1}{x}=f(x)=(\text{ 1 次函数})+(\text{誤差項})=A+B(x-1)+(\text{誤差項}) \tag{13}$$

の形で $f(x)=\frac{1}{x}$ が 1 次函数 $A+B(x-1)$ で近似出来る、すなわち

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\text{誤差項})}{x-1}=0 \tag{14}$$

であると仮定して、定数 A, B を決定してみよう。まず (14) から特に

$$\lim_{x\to 1}(\text{誤差項})=\lim_{x\to 1}\frac{(\text{誤差項})}{x-1}(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{(\text{誤差項})}{x-1}\lim_{x\to 1}(x-1)=\boxed{}$$

であることに注意する。($x-1$ が 0 に近づく時 $|x-1|$ より絶対値がはるかに小さいはずの（誤差項）が 0 に近づくのは当然である。）従って $x\to 1$ の時の (13) の両辺の極限を考えると

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}(\text{左辺})=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=\boxed{}\\ &\lim_{x\to 1}(\text{右辺})=\lim_{x\to 1}\left\{A+B(x-1)+(\text{誤差項})\right\}=A+B\cdot 0+\lim_{x\to 1}(\text{誤差項})=A\end{aligned}$$

即ち $A=\boxed{}$ でなければならないことが分かる。これを (13) に代入すれば

$$\frac{1}{x}=1+B(x-1)+(\text{誤差項})$$

これを B について解いた形にすると

$$B = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1}$$

だから $x \to 1$ の時の両辺の極限を取ると

$$B = \lim_{x \to 1}\left(-\frac{1}{x} - \frac{(\text{誤差項})}{x - 1}\right) = -\lim_{x \to 1}\frac{1}{x} + \lim_{x \to 1}\frac{(\text{誤差項})}{x - 1} = -1 + 0 = -1$$

即ち $B = -1$ でなければならないことが分かる。逆に

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + \varepsilon(x)$$

で $\varepsilon(x)$ を定義すれば

$$\lim_{x \to 1}\frac{\varepsilon(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1 + (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \boxed{}$$

即ち、$\frac{1}{x}$ の $x \to 1$ のときの 1 次近似は $1 - (x - 1)$ であり、$\varepsilon(x)$ はその誤差項であると言える。

1.4.2　一般の場合—微分係数

$f(x)$ が多項式とも $\dfrac{1}{x}$ とも限らない、一般の連続函数の場合も同様に、以下のように定義する：

定義 1 (1 次近似)**.** 与えられた連続函数 $f(x)$ に対して、$A + B(x - a)$ が $x \to a$ のときの $f(x)$ の 1 次近似であるとは

$$f(x) = A + B(x - a) + (\text{誤差項})$$

とおくとき、$x \to a$ のとき $|x - a|$ と比べて（誤差項）の絶対値が無視出来るほど小さい、即ち

$$\lim_{x \to a}\frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0$$

であることを言う。（定義 1 終）

与えられた連続函数 $f(x)$ と与えられた点 $x = a$ に対して定数 A, B が存在して

$$f(x) = A + B(x - a) + (\text{誤差項}) \tag{15}$$

かつ

$$\lim_{x \to a}\frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0 \tag{16}$$

であると仮定しよう。このとき、上の場合と同様

$$\lim_{x \to a}(\text{誤差項}) = \lim_{x \to a}\frac{(\text{誤差項})}{x - a}(x - a) = \lim_{x \to a}\frac{(\text{誤差項})}{x - a}\lim_{x \to a}(x - a) = 0$$

なので

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left\{ A + B(x-a) + (\text{誤差項}) \right\} = A + B\cdot 0 + \lim_{x\to a}(\text{誤差項}) = A$$

であるが、$f(x)$ が $x=a$ で連続ならば $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ だから $A = f(a)$ でなければならない。これを (15) に代入すると

$$f(x) = f(a) + B(x-a) + (\text{誤差項})$$

となり、B について解いた形にすると

$$B = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{(\text{誤差項})}{x-a}$$

となる。両辺の $x\to a$ のときの極限を考えると

$$B = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a}\frac{(\text{誤差項})}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

でなければならない。

定義 2 (微分可能・微分係数)**.** $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在する時、$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であると言い、この極限値を $f'(a)$ と書いて $f(x)$ の $x=a$ における微分係数と言う。即ち、

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

である。（定義 2 終）

注 1. $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は x が a から x まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率であり、x が a に近づくときの平均変化率の極限は $x=a$ の瞬間の $f(x)$ の変化率を表すのであった。

注 2. $x=a+h$ とおけば $x\to a \Leftrightarrow h\to 0$ であるから

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と定義しても良い。こちらの方が見覚えのある人が多いかも知れない。出来れば両方の形に慣れていただきたい。

つまり $A+B(x-a)$ が与えられた連続函数 $f(x)$ の $x\to a$ のときの 1 次近似であると仮定すると、$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であって $A=f(a)$, $B=f'(a)$ であることが言えた訳である。

逆に $A=f(a)$, $B=f'(a)$ であると仮定すると $A+B(x-a)$ が $f(x)$ の $x\to a$ のときの 1 次近似であることを示そう。それは言い換えると

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{x-a} = 0}$$

ということだが、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x) \Rightarrow \frac{R(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)=f'(a)-f'(a)=0$

以上を命題の形でまとめると次のようになる：

命題 1. 与えられた連続函数 $f(x)$ に対して

$$A+B(x-a) \text{ が } f(x) \text{ の } x\to a \text{ のときの 1 次近似} \Leftrightarrow f(x) \text{ は } x=a \text{ で微分可能で} \begin{cases} A=f(a) \\ B=f'(a) \end{cases}$$

(命題 1 終)

「$\Leftarrow$」を別の言い方で言うと

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R(x) \text{ と置くとき } \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{x-a}=0}$$

注 **3.** これはあとで n 次近似まで一般化される。「$\Rightarrow$」は $n\geq 2$ では成り立たないが、「a に関し局所一様に n 次近似可能 $\Leftrightarrow$ n 階連続微分可能」の形にすれば成り立つ。

1.5　第 1 節のまとめ

- 与えられた函数を与えられた点の近くで近似する 1 次函数が存在することを数値実験で観察した。
- 与えられた点の近くでの 1 次近似が存在することとその点で微分可能であることは、同等である。
- $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、1 次函数 $f(a) + f'(a)(x-a)$ が $x \to a$ のときの $f(x)$ の 1 次近似である：

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x) \text{ と置くとき } \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0}$$

これを

$$\boxed{f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)}$$

と書くこともある。

2　２次近似 — ２次函数による近似

2.1　例

$$f(x) = x^3 - 3x \tag{17}$$

について考えよう。x を

$$x = 2 + (x - 2) \tag{18}$$

のように 2 と $x-2$ の和に分けて、(17) に代入して展開すると、

$$f(x) = x^3 - 3x = 2 + 9(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \tag{19}$$

となる。

x の値が非常に 2 に近い時、言い換えると $|x-2|$ が非常に小さい (0 に近い) 時、$|9(x-2)|$ もまた非常に小さいが、$|(x-2)^2|$ や $|(x-2)^3|$ は小さいもの同士を掛け算しているので $|9(x-2)|$ よりもまた更に（桁違いに）小さく、従って $|6(x-2)^2 + (x-2)^3|$ もまた $|9(x-2)|$ と較べて桁違いに小さい。以上が 1 次函数 $2+9(x-2)$ が x^3-3x の x が 2 に非常に近いときの 1 次近似であることの説明であった：

$$x^3 - 3x \fallingdotseq 2 + 9(x-2) \tag{20}$$

更に $|(x-2)^2|$ と $|(x-2)^3|$ の比較では $|(x-2)^2|$ より $|(x-2)^3|$ の方が桁違いに小さいことを考えると

$$x^3 - 3x \fallingdotseq 2 + 9(x-2) + 6(x-2)^2 \tag{21}$$

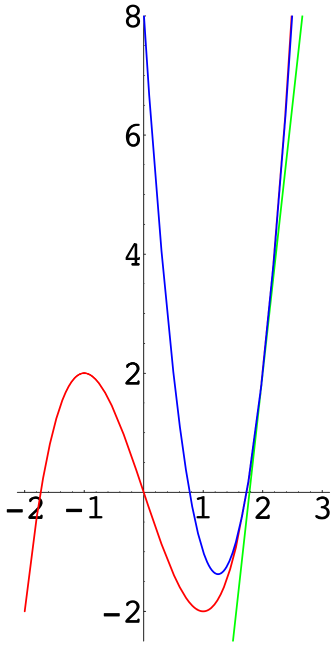
なる近似も考えられ、これは 1 次近似 (20) よりも更に精密な近似であると考えられる。このことを数値実験で見てみよう。

2.1.1　数値実験

x	1.9	$\cdots$	1.99	$\cdots$	1.999	$\cdots$	2
真の値 $f(x) = x^3 - 3x$	1.159	$\cdots$	1.910599	$\cdots$	1.991005999	$\cdots$	2
1 次近似 $2+9(x-2)$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
1 次近似の誤差		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
２次近似 $2+9(x-2)+6(x-2)^2$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
２次近似の誤差		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

2.1.2　幾何学的側面

以上のことをそれぞれの函数のグラフの関係で見てみよう。



直線 $y = 2 + 9(x - 2)$ は 3 次函数のグラフ $y = x^3 - 3x$ に $x = 2$ で接しており、これはそれぞれの函数値が $x = 2$ の近くで非常に近いことの幾何学的反映だった。しかし所詮は直線なので 3 次函数が $x = 2$ 付近で下に凸であることは全く表現できていない。これに対し、放物線 $y = 2 + 9(x - 2) + 6(x - 2)^2$ は $x = 2$ の近くではほとんど重なって見えるくらいに近く、しかも $x = 2$ 付近での $y = x^3 - 3x$ の曲がり具合をも見事に表現している。(その代わり $x = 2$ から遠くなるとかけ離れた形になってしまうが。)

2.2　2 次近似の定義

1 次近似の定義では、x が a に非常に近いとき (誤差項) の絶対値が $|x - a|$ と較べて無視できるほど小さい、即ち

$$\lim_{x \to a} \frac{|(\text{誤差項})|}{|x - a|} = 0$$

あるいは同じことだが

$$\lim_{x \to a} \frac{(\text{誤差項})}{x - a} = 0$$

であることと定義した。そこで 2 次近似の概念を以下のように定義しよう：

定義 3 (2 次近似)**.** 与えられた連続函数 $f(x)$ に対して、$A + B(x - a) + C(x - a)^2$ が $x \to a$ のとき

の $f(x)$ の２次近似であるとは

$$f(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + (\text{誤差項}) \tag{22}$$

と置くとき $x \to a$ のとき$\underline{(x-a)^2 \text{ と比べて}}$（誤差項）の絶対値が無視出来るほど小さい、即ち

$$\lim_{x \to a} \frac{(\text{誤差項})}{(x-a)^2} = 0$$

であることを言う。（定義 3 終）

先の例

$$x^3 - 3x = 2 + 9(x-2) + 6(x-2)^2 + (\text{誤差項})$$

で言えば

$$\lim_{x \to 2} \frac{(\text{誤差項})}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - \left\{2 + 9(x-2) + 6(x-2)^2\right\}}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2}(x-2) = 0$$

であって、この定義で確かに２次近似になっていると言える。

2.3　２次近似の求め方

2.3.1　多項式の場合

$f(x)$ が多項式の場合は、$x^3 - 3x$ の場合と全く同様に出来ることはもうおわかりであろう。$f(x)$ を m 次多項式とすれば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} x^{m-k} = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{23}$$

という形をしている。例えば $x = 1 + (x-1)$ と思うことにして

$$\begin{aligned}
x &= 1 + (x-1) \\
x^2 &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \\
x^3 &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x^m &= 1 + m(x-1) + \frac{m(m-1)}{2}(x-1)^2 + \cdots + (x-1)^m
\end{aligned}$$

を (23) に代入して昇冪の順に整理すれば

$$f(x) = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 + A_3(x-1)^3 + \cdots + A_m(x-1)^m$$

と言う形になる。$A_3(x-1)^3+\cdots+A_m(x-1)^m$ を誤差項と思えば

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(\text{誤差項})}{(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1}\frac{A_3(x-1)^3+A_4(x-1)^4+\cdots+A_m(x-1)^m}{(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to 1}\left\{A_3(x-1)+A_4(x-1)^2+\cdots+A_m(x-1)^{m-2}\right\}=0\end{aligned}$$

であるので $A_0+A_1(x-1)+A_2(x-1)^2$ が $f(x)$ の $x\to 1$ のときの 2 次近似である。与えられた定数 a に対し $x\to a$ のときの 2 次近似も全く同様に求めることが出来る。

2.3.2 一般の場合は？

ならば $f(x)$ が多項式でない場合はどうやって求めればよいだろうか。例えば 1 次近似の時に挙げた例

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

について考えよう。今度は x に $x=1+(x-1)$ を代入しても

$$f(x)=\frac{1}{1+(x-1)}$$

となるだけで、どうやって展開したらいいのかわからない。

2.3.3 再び多項式の場合

$f(x)$ が多項式の場合は、$x=a+(x-a)$ を代入し展開して整理すれば

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3\cdots+A_m(x-a)^m \tag{24}$$

と言う形になり、$A_3(x-a)^3+\cdots+A_m(x-a)^m$ を誤差項と思った

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+(\text{誤差項})$$

が 2 次近似に他ならないのであった。また、$A_2(x-a)^2+\cdots+A_m(x-a)^m$ を誤差項と思えば

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+(\text{誤差項})$$

は 1 次近似に他ならないので、前にやったことから

$$\boxed{\begin{aligned}A_0&=f(a)\\A_1&=f'(a)\end{aligned}}$$

であることが分かる。このことを少し違ったやり方で出してみよう。(24) の両辺に $x=a$ を代入すれば

$$f(a)=A_0$$

となる。更に (24) の両辺を x について微分すれば

$$f'(x)=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2\cdots+mA_m(x-a)^{m-1} \tag{25}$$

この両辺に $x = a$ を代入すれば

$$f'(a) = A_1$$

を得る。更に (25) の両辺を微分すれば

$$f''(x) = 2 \cdot 1A_2 + 3 \cdot 2A_3(x-a) \cdots + m(m-1)A_m(x-a)^{m-2} \tag{26}$$

を得るので、この両辺に $x = a$ を代入すれば、

$$f''(a) = 2A_2$$

である。即ち

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= f(a) && (27)\\ A_1 &= f'(a) && (28)\\ A_2 &= \frac{f''(a)}{2} && (29)\end{aligned}}$$

であることが分かる。(27)(28) は $f(x)$ が多項式でない場合も成り立つのだから (29) も成り立ちそうに思われる。

2.3.4 一般の場合の２次近似の公式

実際、必ずしも多項式でない一般の函数 $f(x)$ に対しても

定理 1 (２次テイラー近似)**.** $x = a$ の近くで $f'''(x)$ が存在して連続ならば

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R(x) \quad \text{とおくと} \quad \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2} = 0}$$

であることが証明できる。通常、右辺を２次までのテイラー展開、$R(x)$ を剰余項（今までは「誤差項」と呼んでいた）と言う。証明は次の評価式があればすぐ出来る。

命題 2 (２次近似の剰余項の評価)**.** 定理 1 と同じ仮定の下、$x = a$ を含むある区間での $|f'''(x)|$ の最大値を M とすれば、同じ区間で

$$\boxed{|R(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-a|^3}$$

命題 2 の証明には例えば次を用いればよい：

命題 3 (２次近似の剰余項の積分表示式)**.** 定理 1 と同じ仮定の下、

$$\boxed{R(x) = (x-a)^3 \int_0^1 f'''(a + t(x-a)) \frac{(1-t)^2}{2} dt}$$

注 **4.** 定理 1・命題 2・3 の証明については http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~norip/taylor_approx.pdf を参照。

注 5. 定理 1 は杉浦 p.102 の定理 2.12 にあたる。(小林「読本」にはないようだ。) 証明方法は全く異なる。我々の方が強い仮定を置いている。定理 1 そのものは $f''(a)$ の存在だけを仮定すれば出る。命題 3 の証明は杉浦 pp.100-101 にもある。また小林「読本」pp.184-185 にもある。

問 1. 以下 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $R(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right)$ とする。

- $a = 1$ のとき、まず $R(x)$ を計算して簡単な形に直し、次に $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{R(x)}{(x-1)^2} = 0$ であることを極限の計算により示せ。

- $R(x) = (x-a)^3 \displaystyle\int_0^1 f'''(a + t(x-a)) \frac{(1-t)^2}{2} dt$ であることを右辺の積分計算により示せ。(ヒント：見通しなく計算していくと書くだけでも結構大変である。$a + t(x-a) = y$ とおいて置換積分 (a, x は定数と見なして良い) して積分変数を t から y に変えると見通しがよくなる。)

2.4　第 2 節のまとめ

$f(x)$ が多項式の時は、２次近似の公式：

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R(x) \quad \text{とおくと} \quad \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2} = 0}$$

が成り立つことがすぐ分かる。多項式でないときも適当な仮定の下で証明できる。

3　n 次近似 — n 次多項式による近似（テイラー近似）

3.1　多項式の場合

更に (26) の両辺を x について微分すれば

$$f'''(x) = A_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + A_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(x-a) + \cdots + A_m \cdot m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}$$

となるからこの両辺に $x = a$ を代入すると

$$f'''(a) = 3! \cdot A_3$$

となる。このような操作を繰り返せば

$$f(a) = A_0,\ f'(a) = A_1,\ f''(a) = 2! \cdot A_2,\ f'''(a) = 3! \cdot A_3, \ldots, f^{(m)}(a) = m! \cdot A_m$$

を得る。$A_0, A_1, \ldots, A_m$ について解けば

$$A_0 = f(a),\ A_1 = f'(a),\ A_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ A_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots, A_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

となる。$f(x)$ を $x-a$ の多項式として展開し直した時の係数は $f(x)$ の（高階も含む）導函数達の $x = a$ における値を用いて表されるということである。これを元の (24) に代入すると

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}$$

を得る。多項式のテイラー展開公式である。この式の右辺は m 次多項式なので、$f(x)$ が多項式でない限り同じ公式は期待できない（成り立つことはあり得ない)。

上の式で $n < m$ なる n に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

で

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

と置いて誤差項と思えば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}{(x-a)^n} \\ &= \lim_{x\to a} \left\{ \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-n} \right\} = 0\end{aligned}$$

であるので、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R(x) \text{ と置くと } \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0$$

という m 次多項式を n 次多項式で近似する公式が得られる。この形にすると $f(x)$ が多項式でない場合にも成り立つことが期待できる。

3.2 一般の場合の n 次近似の公式

実際、必ずしも多項式でない一般の函数 $f(x)$ に対しても成り立つことが証明できる：

定理 2 (テイラー近似)**.** $x=a$ の近くで $f^{(n+1)}(x)$ が存在して連続ならば

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R(x) \text{ と置くと } \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0}$$

通常、右辺を $x=a$ における n 次までのテイラー展開、$R(x)$ を剰余項（今までは「誤差項」と呼んでいた）と言う。証明は次の評価式があればすぐ出来る。

命題 4 (剰余項の評価)**.** $x=a$ の近くでの $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ の最大値を M とすれば

$$\boxed{|R(x)|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}} \tag{30}$$

命題 4 の証明は例えば次を用いればよい：

命題 5 (剰余項の積分表示式)**.**

$$\boxed{R(x)=(x-a)^{n+1}\int_0^1 f^{(n+1)}(a+t(x-a))\frac{(1-t)^n}{n!}dt}$$

注 **6.** 定理 2・命題 4・5 の証明については http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~norip/taylor_approx.pdf を参照。

注 **7.** 定理 2 は杉浦 p.102 の定理 2.12 にあたる。（小林「読本」にはないようだ。）証明方法は全く異なる。我々の方が強い仮定を置いている。定理 2 そのものは $f^{(n)}(a)$ の存在だけを仮定すれば出る。命題 5 の証明は杉浦 pp.100-101 にもある。また小林「読本」pp.184-185 にもある。

3.3　n 次近似の例

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + (\text{剰余項}) \\
\frac{1}{x} &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + (\text{剰余項}) \\
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots + x^m \qquad (m \text{ は正の整数}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + (\text{剰余項}) \qquad (\alpha \text{ は実数の定数}) \\
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + (\text{剰余項}) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + (\text{剰余項}) \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + (\text{剰余項})
\end{aligned}
$$

問 **2.** 上の例を自分で計算せよ。

3.4　テイラー近似の一意性

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\left(f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + S(x) \text{ かつ } \lim_{x \to a} \frac{S(x)}{(x-a)^n} = 0 \right) \\
&\Rightarrow a_0 = f(a), a_1 = f'(a), \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}
\end{aligned}
}
$$

証明.

$$
f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R(x) \text{ と置くと } \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0
$$

辺々引くと

$$
\begin{aligned}
0 = (a_0 - f(a)) + (a_1 - f'(a))(x-a) + \cdots + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right)(x-a)^n \\
+ \left(\frac{S(x)}{(x-a)^n} - \frac{R(x)}{(x-a)^n} \right)(x-a)^n
\end{aligned}
\tag{31}
$$

となるので、両辺 $x \to a$ の極限をとると $0 = a_0 - f(a)$ を得る。(31) に $a_0 - f(a) = 0$ を代入すると $n \geq 1$ なら

$$
\begin{aligned}
0 = (a_1 - f'(a))(x-a) + \left(a_2 - \frac{f''(a)}{2} \right)(x-a)^2 + \cdots + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right)(x-a)^n \\
+ \left(\frac{S(x)}{(x-a)^n} - \frac{R(x)}{(x-a)^n} \right)(x-a)^n
\end{aligned}
$$

更に $x-a$ で割ると

$$0 = (a_1 - f'(a)) + \left(a_2 - \frac{f''(a)}{2}\right)(x-a) + \cdots + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^{n-1} + \left(\frac{S(x)}{(x-a)^n} - \frac{R(x)}{(x-a)^n}\right)(x-a)^{n-1}$$

となるので、両辺 $x \to a$ の極限をとると $0 = a_1 - f'(a)$ を得る……

以上の操作を繰り返すと証明になる。(厳密には数学的帰納法でやる。) （証明終）

3.5　数学的帰納法

3.6　第 3 節のまとめ

- $f(x)$ が m 次多項式のときは

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}$$

- $f(x)$ が多項式でない場合も含めて、任意の自然数 n に対して

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R(x)\ \text{と置くと}\ \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0}$$

- $x=a$ の近くでの $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ の最大値を M とすれば

$$\boxed{|R(x)|\leq\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}}$$

4　テイラー近似の応用

4.1　近似値の誤差評価

$x \to 1$ のときの $f(x)$ の 1 次テイラー近似の式

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + (\text{ 1 次近似の誤差項})$$

において $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ とすれば $f(1) = 1,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f'(1) = \dfrac{1}{2}$ なので

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (\text{ 1 次近似の誤差項})$$

である。ここで (30) によれば

$$\left|(\text{ 1 次近似の誤差項})\right| \leq \frac{M}{2!}|x-1|^2 \tag{32}$$

である。（ただし、M は $\sqrt{x}$ の 2 階導関数 $-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ の絶対値 $\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ の 1 から x までの最大値。）今、特に $x = 2$ とすると

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}(2-1) + (\text{ 1 次近似の誤差項}) = 1.5 + (\text{ 1 次近似の誤差項})$$

であり、$\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ の 1 から 2 までの最大値 M は（$x^{-\frac{3}{2}}$ が単調減少であることから）$\dfrac{1}{4}$ であって、

$$\left|(\text{ 1 次近似の誤差項})\right| \leq \frac{\frac{1}{4}}{2!}|2-1|^2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

であることがわかる。すなわち、$\sqrt{2}$ の近似値として 1.5 が得られ $\sqrt{2}$ との誤差は 0.125 以下であることが厳密に示された訳である。

もう少し頑張って 2 次近似もしてみよう。$x \to 1$ のときの $f(x)$ の 2 次テイラー近似の式

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + (\text{ 2 次近似の誤差項})$$

において $f''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f''(1) = -\dfrac{1}{4}$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + (\text{ 2 次近似の誤差項})$$

となる。(30) によれば

$$\left|(\text{ 2 次近似の誤差項})\right| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3 \tag{33}$$

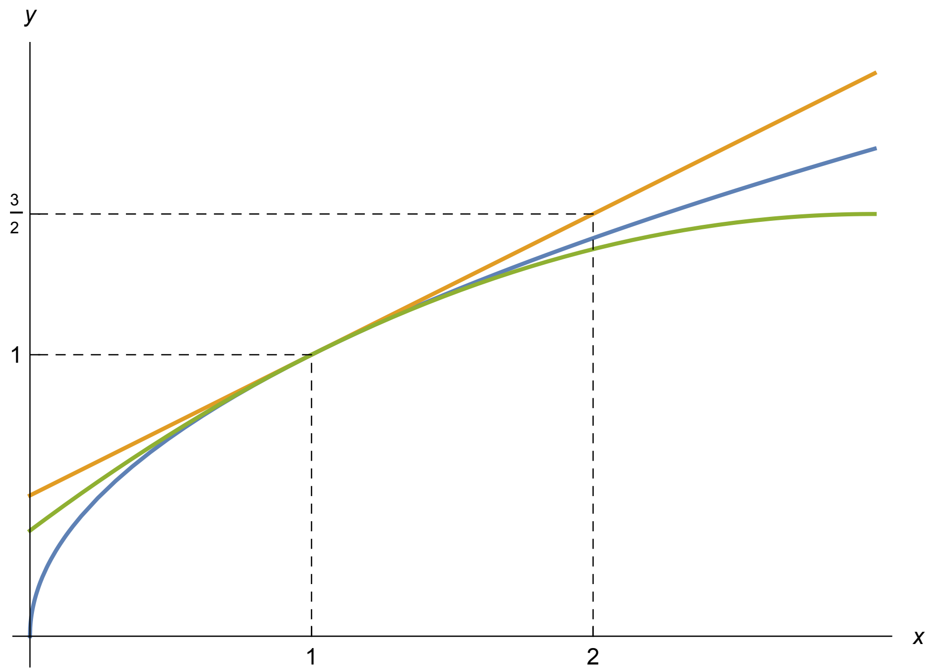
である。（ただし、M は $\sqrt{x}$ の 3 階導関数 $\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ の絶対値 $\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ の 1 から x までの最大値。）今、特に $x = 2$ とすると

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 + (\text{ 2 次近似の誤差項}) = 1.375 + (\text{ 2 次近似の誤差項})$$

であり、$\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ の 1 から 2 までの最大値 M は（$x^{-\frac{5}{2}}$ が単調減少であることから）$\dfrac{3}{8}$ であって、

$$\left|(\,2\,\text{次近似の誤差項})\right| \leq \frac{\frac{3}{8}}{3!}|2-1|^3 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

であることがわかる。すなわち、$\sqrt{2}$ の近似値として 1.375 が得られ $\sqrt{2}$ との誤差は 0.0625 以下であることが厳密に示された訳である。もっと高い次数の近似をすればいくらでも良い近似が得られる。$\sqrt{2}$ の場合は定義（2 乗して 2 になる正の数）に戻って考えた方が簡単に近似値が求められるかも知れないが、そういう方法は他の函数の場合には通用しない。テイラー展開による近似はどんな函数にも同じように適用出来るところが優れている。(ただし、元になる点——上の場合で言えば $x=1$——での導函数の値がわからないとダメ。また、M の評価が出来ないと誤差の評価が出来ない。)



問 **3.** 同様に $\sqrt{x}$ の $x=1$ における 3 次テイラー近似の式を用いて $\sqrt{2}$ の近似値を求め 4 階導函数を用いて誤差を評価してみよ。

4.2　法則の近似

4.2.1　振り子の運動

振り子の運動は、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) \tag{34}$$

なる方程式で記述されることを物理で習ったのではないだろうか。ここで $\theta(t)$ は時刻 t における振り子の角度（鉛直下向きを角度 0 としている）であり、g は重力加速度、l はひもの長さである。この微分方程式を解くと $\theta(t)$ は楕円函数と呼ばれるものになるのだが、やや高級なので最初に習うときは次のようにする：

$\theta = 0$ の近くでの $f(\theta)$ の 1 次までのテイラー近似の式

$$f(\theta) = f(0) + f'(0)\theta + (\text{誤差項})$$

で $f(\theta) = \sin\theta$ とすると $f'(\theta) = \cos\theta,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ であるので、θ が 0 に近いとき

$$\sin\theta = \theta + (\text{誤差項})$$

であることが分かる。従って、振り子の振れる角度が余り大きくないときには (34) の $\sin\theta(t)$ を $\theta(t)$ に置き換えて得られる

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t) \tag{35}$$

の解は元の方程式 (34) の解に近いと考えられる。これはいわゆる単振動、あるいは調和振動の方程式であって、

$$\theta(t) = C_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

なる解を持つ。

問 **4.** 上の式を調和振動の方程式 (35) の両辺にそれぞれ代入して計算し、解であることを確かめよ。

4.2.2 相対性理論

Einstein の相対性理論によれば質量 m の粒子は $E = mc^2$（c は光速）のエネルギーを持つことはどこかで聞いたことがあるであろう。質量 m は実は定数ではなく、速さが v の時の質量は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{36}$$

となる。（ここで $v = 0$ を代入すると $m = m_0$ となるので m_0 は静止しているときの質量であることが分かる。）これを $E = mc^2$ の式に代入すると

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{37}$$

となる。今 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x) = \boxed{}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, $f''(0) = \boxed{}$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \boxed{}x^2 + (\text{誤差項})$$

通常の粒子のスピードは光速よりはるかに遅いので $\dfrac{v^2}{c^2}$ は非常に 0 に近いと考えられる。そこで x に $\dfrac{v^2}{c^2}$ を代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \boxed{}\frac{v^4}{c^4}$$

という非常に誤差の小さい近似式が得られる。これを (37) に代入すると

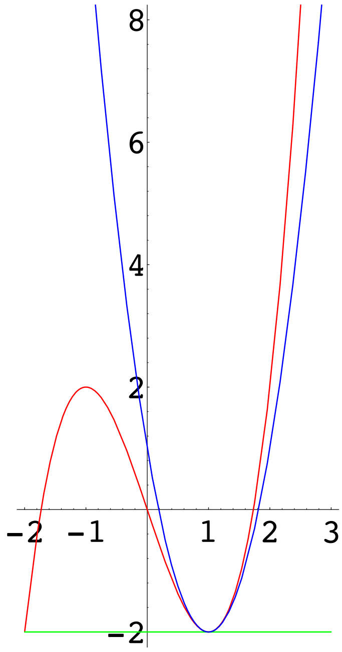
$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \fallingdotseq m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \boxed{}m_0\frac{v^4}{c^2}$$

という非常に誤差の小さい近似式が得られる。$m_0 c^2$ は粒子が静止していたときに質量が持っていたエネルギーであり、それに粒子の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}m_0 v^2$ を足したものが 1 次近似であり、更にそれに $\boxed{}m_0\dfrac{v^4}{c^2}$ を足したものが 2 次近似という訳である。つまり Newton 力学は Einstein の相対性理論の 1 次近似であり、相対性理論の予言するエネルギーの方がほぼ $\boxed{}m_0\dfrac{v^4}{c^2}$ だけ多いということになる。

問 5. 例えば v が時速 1000km 位だとして、Newton 力学と相対性理論の予言するエネルギーの差の近似値を求め、運動エネルギーに対するパーセンテージ（有効数字 1 桁でよい）を求めてみよ。

4.3　極大極小

3 次函数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフ $y = f(x)$（赤）と、その $x = 1$ における 1 次近似 $-2 + 0(x-1)$ のグラフの直線 $y = -2 + 0(x-1)$（緑）、2 次近似 $-2 + 0(x-1) + 3(x-1)^2$ のグラフの放物線 $y = -2 + 0(x-1) + 3(x-1)^2$（青）を同じ xy 平面上に描いたものが以下の図である。



こうしてみると 3 次函数のグラフは極小値点のあたりでは非常に放物線に近い形をしていることが見て取れるであろう。同じ点を極小値点に持つ放物線のうちで与えられた 3 次函数のグラフに一番近い放物線を与える 2 次函数が 2 次近似である。

この事情は 3 次函数に限らず一般の 2 次近似可能な函数に当てはまる。特に、今考えている点での 2 次近似がその点で極大なら元の函数も極大、その点で極小なら元の函数も極小である。2 次近似の式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

において $f'(a) = 0$ のときは

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

となるが、右辺の 2 次函数のグラフ $y = f(a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ は $f''(a) > 0$ のとき $x = a$ で極小、$f''(a) < 0$ のとき $x = a$ で極大であるので、

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(a) = 0, f''(a) > 0 \Rightarrow x = a \text{ で } f(x) \text{ は極小} \\ f'(a) = 0, f''(a) < 0 \Rightarrow x = a \text{ で } f(x) \text{ は極大} \end{array}}$$

であることが分かる。(証明には $\lim_{x\to a}\frac{(\text{誤差項})}{(x-a)^2}=0$ であることを用いる。)

問 **6.** $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ における 2 次までのテイラー展開を計算せよ。また、その 2 次函数のグラフと $y = \cos x$ のグラフの両方を一つの xy 平面上に描け。

4.4 n 次近似の応用？

上で述べた例はせいぜい 2 次近似までの応用だった。勿論 3 次近似、4 次近似、・・・と近似の次数を上げていけば更に良い近似が得られるが、一般の n 次近似などというものが何の役に立つのだろうと訝る人もいるかも知れない。実はあとで $n \to \infty$ の極限を考えるときに第 n 項の形や n 次近似の誤差評価が必要になる。この極限は「テイラー級数」あるいは「冪級数展開」と呼ばれるもので、これを用いて、元の函数について 2 次近似や 3 次近似を用いてもわからない性質を知ることが出来る。(第 6 節参照。)

4.5　第 4 節のまとめ

- テイラー近似を用いると与えられた函数の近似値が誤差評価付きで得られる（場合がある）。
- 現象をモデル化するときにも 1 次近似が用いられる。また既に得られたモデルを数学的に解くのが難しいときはそのモデルを 1 次近似して得られるモデルの解をまず考えることが有効である。
- ２次近似のグラフの放物線の形状から元の函数のグラフの凹凸や極大極小の判定が出来る。

5　Landau の小さい o

注 8. この節は読み飛ばしても後を勉強するには差し支えないが、大変役に立つので興味のある人は熟読してほしい。

5.1　例

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 1 + 2(x-1) + R_2(x) \\
x^3 &= x^2 \cdot x = \{1 + 2(x-1) + R_2(x)\}\{1 + (x-1)\} \\
&= 1 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + R_2(x)\{1 + (x-1)\}
\end{aligned}
$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{R_2(x)}{x-1} = 0$ であったから、

$$
\lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)^2 + R_2(x)\{1+(x-1)\}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left[2(x-1) + \frac{R_2(x)}{x-1}\{1+(x-1)\}\right] = 2\cdot 0 + 0(1+0) = 0
$$

となって、$2(x-1)^2 + R_2(x)\{1+(x-1)\}$ が x^3 の $x=1$ における 1 次近似の誤差項と見なせて、

$$
x^3 = 1 + 3(x-1) + (\text{誤差項})
$$

なる 1 次近似の式が得られることになる。同様にすれば（厳密には数学的帰納法により）$n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき

$$
x^n = 1 + n(x-1) + (\text{誤差項})
$$

なる 1 次近似の式が（２項展開を知らなくても）得られる。

こういう時便利なのが所謂 Landau の小さい o（大きい O もあるがここでは使わない。）なる記号である。一般に

$$
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0
$$

であるとき「$x \to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ と較べて無視できるほど小さい」と言い

$$
f(x) = o\,(g(x)) \ \ (x \to a)
$$

と書く。

$$
f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)
$$

なので、0 に近づく $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の部分を、どんな函数であるかは無視して十把一絡げに o と書いたのである。上の例であれば、$x \to 1$ のとき

$$\boxed{\begin{aligned}(x-1)^2 &= o(x-1)\\ (\text{連続函数})\cdot o(x-1) &= o(x-1)\end{aligned}}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
x^2 &= 1+2(x-1)+o(x-1)\\
x^3 &= x^2\cdot x = \{1+2(x-1)+o(x-1)\}\{1+(x-1)\}\\
&= 1+3(x-1)+2(x-1)^2+o(x-1)\{1+(x-1)\}\\
&= 1+3(x-1)+o(x-1)
\end{aligned}$$

という風に計算できる。

問 **7.** $x=a+(x-a)$ から $x^2=a^2+2a(x-a)+o(x-a)$ および $x^3=a^3+3a^2(x-a)+o(x-a)$ を導け。

5.2 Landau の記号と積の微分

$x\to a$ のとき

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)\\
g(x) &= g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)\\
f(x)g(x) &= f(a)g(a)+\{f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\}(x-a)+f'(a)g'(a)(x-a)^2\\
&\quad +f'(a)(x-a)o(x-a)+o(x-a)g'(a)(x-a)+o(x-a)o(x-a)\\
&= f(a)g(a)+\{f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\}(x-a)+o(x-a)
\end{aligned}$$

一方 $f(x)g(x)=h(x)$ とおけば

$$f(x)g(x)=h(x)=h(a)+h'(a)(x-a)+o(x-a)$$

であるので 1 次近似の一意性から $h'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$ でなければならない。即ち

$$\boxed{\{f(x)g(x)\}'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)}$$

であることが証明された。つまりこれは「積の 1 次の係数は（前の 0 次の係数）×（後ろの 1 次の係数）＋（前の 1 次の係数）×（後ろの 0 次の係数）である」という平凡なことを言っているに過ぎない。

公式を無理に憶えなくても例えば、$x\to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+o(x)\\
\sin x &= x+o(x)
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
e^x\sin x &= (1+x+o(x))(x+o(x)) = x+x^2+o(x)x+(1+x+o(x))o(x)\\
&= x+o(x)
\end{aligned}$$

は慣れれば暗算で出来る。$x \to a$ のときを考えれば

$$\begin{aligned} e^x &= e^a + e^a(x-a) + o(x-a) \\ \sin x &= \sin a + (\cos a)(x-a) + o(x) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (e^a + e^a(x-a) + o(x-a))(\sin a + (\cos a)(x-a) + o(x)) \\ &= e^a \sin a + \left(e^a \sin a + e^a \cos a\right)(x-a) + o(x-a) \end{aligned}$$

これは $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$ を意味し、積の微分の計算例になっている。

問 **8.** $e^x \cos x$ の $x = a$ における微分を上と同様に計算せよ。

5.3　第 5 節のまとめ

- $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ であるとき
「$x\to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ と較べて無視できるほど小さい」
と言い
$$\boxed{f(x)=o\,(g(x))\ \ (x\to a)}$$
と書く。この o を「Landau の小さい o」という。$g(x)$ に絶対値の小さい値 o を掛け算している感じを表す記号である。
- 「Landau の小さい o」を用いるとテイラー展開や微分の計算が直観的に出来る。

注 **9.** 「Landau の小さい o」については例えば杉浦 pp.114-118 を参照せよ。(小林「読本」にはないようだ。)

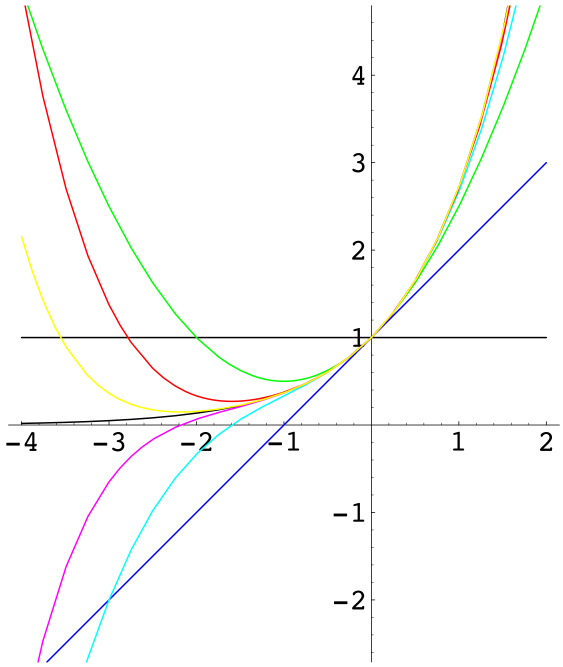
6　テイラー級数 — 無限冪級数としてのテイラー展開

6.1　n 次近似の n を大きくしていくとどうなるか？

$f(x)$ の n 次までのテイラー展開の式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

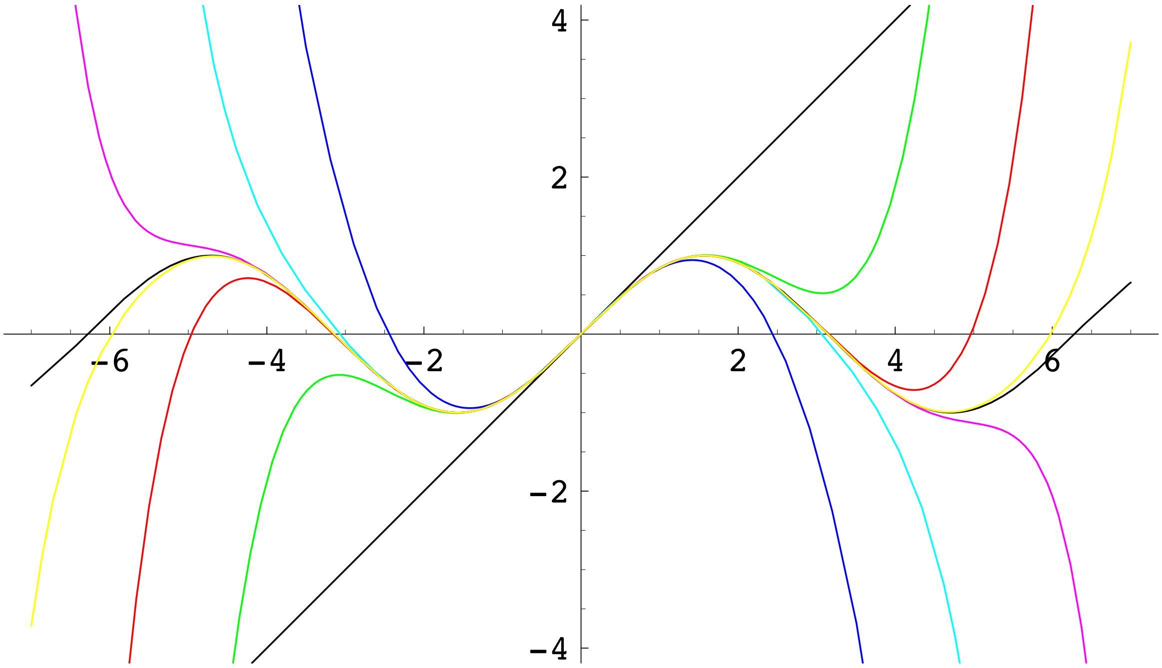
はあくまでも x が a に非常に近いときの近似式だった。実際、例えば e^x の $x=0$ における n 次近似のグラフは



色	グラフ
黒	$y = e^x$
黒	$y = 1$
青	$y = 1 + x$
緑	$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
水色	$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$
赤	$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$
紫	$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$
黄	$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$

となって $x=0$ から遠くなると全然近くないのであるが、n を大きくするにつれ近いところの近似が精密になるだけでなく、近似が有効な x の範囲も段々広がっていくことが見て取れる。三角関数 $\sin x$ の

場合は



色	グラフ
黒	$y = \sin x$
黒	$y = x$
青	$y = x - \frac{x^3}{3!}$
緑	$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
水色	$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$
赤	$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$
紫	$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$
黄	$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}$

となって、よりはっきりと、n が大きくなるにつれて近似が有効な x の範囲が広がっていく様子が見て取れる。(一般に n 次多項式函数は多くても $(n-1)$ 回しか波打てないので、次数を上げていかないと三角函数を広い範囲で近似できないことは最初から分かっていることである。)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

一般に

$$
\begin{aligned}
&f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (n\text{ 次近似の誤差項}),\\
&\big|(n\text{ 次近似の誤差項})\big| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},\\
&M = \Big(|f^{(n+1)}(a+t(x-a))|\text{ の }0 \leq t \leq 1\text{ における最大値}\Big)
\end{aligned}
$$

であった。$f(x)=e^x$, $a=0$ とすると $f^{(n)}(x)=e^x$ で

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + (n\text{ 次近似の誤差項}),\\
&\big|(n\text{ 次近似の誤差項})\big| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1},\\
&M = \big(|e^{tx}|\text{ の }0 \leq t \leq 1\text{ における最大値}\big) \leq e^{|x|}
\end{aligned}
$$

与えられた x に対して正の整数 N を $N \geq |x|$ なるように取れば

$$
\begin{aligned}
\big|(n\text{ 次近似の誤差項})\big| &\leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^{|x|}\frac{|x|^N}{N!}\frac{|x|}{N+1}\frac{|x|}{N+2}\cdots\frac{|x|}{n+1}\\
&\leq e^{|x|}\frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n+1-N} \to e^{|x|}\frac{|x|^N}{N!}\cdot 0 = 0\ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\lim_{n\to\infty}(n\text{ 次近似の誤差項}) = 0
$$

即ち

$$
e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots
$$

であることが示せる。

問 **9.** $\sin x$ の $x=0$ における $(2n+1)$ 次近似の誤差項が任意の実数 x に対して $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを上と同様に示せ。

6.2 Euler の公式とその周辺

$$
\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{38}
$$

$$
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i\sin x
\end{aligned}
\tag{40}
$$

e^{ix} っていったい何だと思われるかも知れないが、一般に複素数 z に対して e^z を

$$
e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots
$$

で定義する。(z が一般に複素数のときに右辺が収束するかどうかは大いに問題であるが、z が実数の場合と全く同様に証明出来る。)そうすると、既に証明したことから、z が特に実数のときには高校でならった指数函数と一致していることがわかる。また、上の計算から確かに

$$
\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x \ (\text{Euler の公式})}
\tag{41}
$$

が成り立つことが分かる。

6.2.1 Euler の公式と三角函数の加法定理

一般に複素数 z と w に対して

$$
\boxed{e^{z+w} = e^z e^w}
\tag{42}
$$

が成り立つことは計算で示せる：

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}z^{n-k}w^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}{n!}z^{n-k}w^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!\,k!}z^{n-k}w^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\frac{w^k}{k!} \\
&= \sum_{(n,k)\in\{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid 0\le k\le n<\infty\}}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\frac{w^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\frac{w^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

ここで $n-k=l$ とおくと $n=k,k+1,k+2,\cdots$ は $l=0,1,2,\cdots$ に対応するので

$$
e^{z+w} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!} = e^w e^z = e^z e^w
$$

が成り立つ。

(42) は「指数法則」と呼ばれるものの一種だが、指数函数の加法定理(加法公式)と呼ぶことも出来る。これを用いると三角函数の加法定理は計算で出せる。実際、

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)
\end{aligned}
$$

なので α, β を実数とすれば、実部と虚部をそれぞれ比較することにより cosine と sine の加法定理を得る。

6.2.2　三角函数はもう要らない

　ところで

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \tag{43}$$

(i を $-i$ に変えたと考えてもよいし x の代わりに $-x$ を代入して cosine が偶函数で sine が奇函数であることを用いたと考えてもよい。) であるので (41) と (43) を足して 2 で割ったり引いて $2i$ で割ったりすると

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$

を得る。従って三角函数を含む式はこれを使って指数函数で書き直してしまえばあとは指数函数の計算に帰着する。言うまでもなく指数函数の方が何をするにしても簡単である。

問 10. 以下の積分値を、被積分函数中の三角函数をまず指数函数に直し、以後三角函数を用いずに最後まで計算せよ。

- $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$ (部分積分を用いてはならない。)

- $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x dx$

- $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x} x \sin x dx$ (部分積分を用いる。)

6.3 $\frac{1}{1-x}$ のテイラー展開

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f'''(x) = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4}, \cdots, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \cdots$$

だから

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 2,\ f'''(0) = 3\cdot 2, \cdots, f^{(n)}(0) = n!, \cdots$$

となるので $x = 0$ における n 次までのテイラー展開は

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + (n\ \text{次近似の誤差項})$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - x\cdot(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)\\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1})\\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

であることから

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

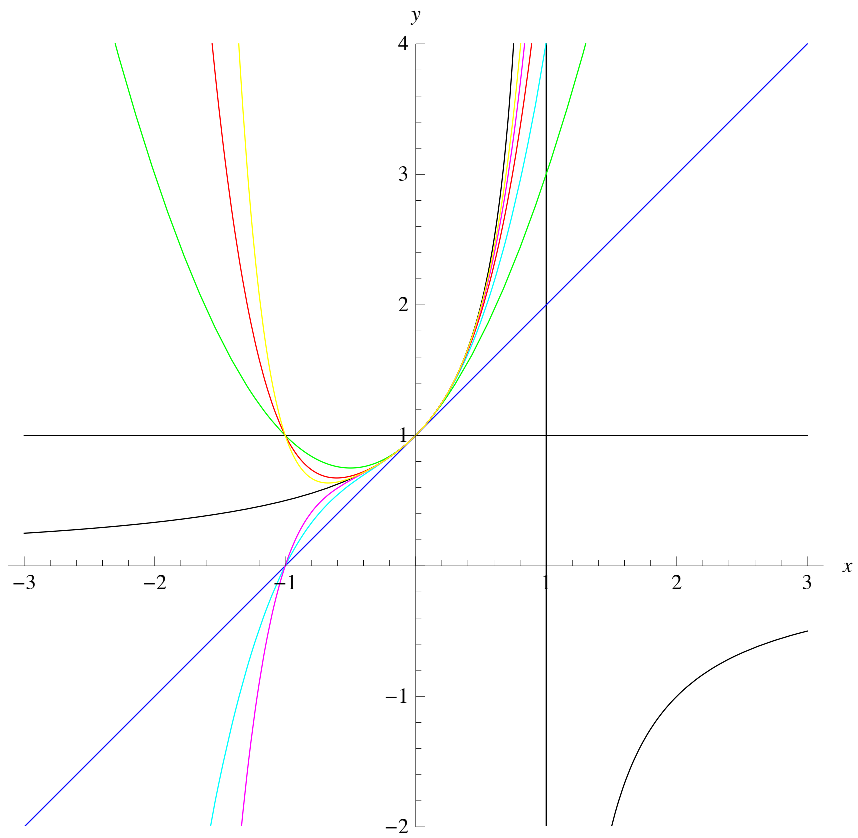
なる式が得られる。これは初項 1、公比 x の等比数列の第 $n+1$ 項までの和を計算する公式になっている。これを用いると $\dfrac{1}{1-x}$ の $x = 0$ における n 次近似の誤差項 $R_{n+1}(x)$ は

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x} - \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

となる。x を固定して $n \to \infty$ とすると、$|x| > 1$ のときは発散し（言い換えると「収束せず」）$|x| < 1$ のときは 0 に収束する。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

指数函数 e^x や三角函数 $\cos x, \sin x$ の場合すべての実数 x に対し $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ であったが、$\dfrac{1}{1-x}$ の場合は $|x| < 1$ の場合のみ $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ になる。



色	グラフ
黒	$y = \frac{1}{1-x}$
黒	$y = 1$
青	$y = 1 + x$
緑	$y = 1 + x + x^2$
水色	$y = 1 + x + x^2 + x^3$
赤	$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
紫	$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
黄	$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

6.4　実解析函数

今まで挙げた例のように、一般に、$x = a$ におけるテイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

において、a を中心とするある範囲（例えば $|x-a| < r$）で

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

が成り立つとき、言い換えると、a を中心とするある範囲で

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

が成り立つとき、$f(x)$ は $x=a$ で実解析的であるという。また、定義域に属する各点で実解析的な函数を実解析函数と呼ぶ。

問 **11.** e^x が数直線全体で定義された実解析函数であることを示せ。(ヒント：数直線上の任意の点 a におけるテイラー展開が e^x に収束することを示せばよい)

一方、何回でも微分可能であるのに実解析的でない函数も存在する。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \lim_{h \to +0} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h}}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \\ \lim_{h \to -0} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \to -0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

なので微分係数の定義により $f'(0)=0$ であることがわかる。従って $f(x)$ は数直線全体で微分可能であって

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

であることがわかる。同様にして $f''(x), f'''(x), \cdots$ も計算できるので、この $f(x)$ は数直線上いたるところ何回でも微分可能である。しかし、$x=0$ においては実解析的でないことがすぐわかる。何故なら $f^{(n)}(0)=0$ であることから $x=0$ におけるテイラー展開は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \cdots = 0 \end{aligned}$$

であるが、$x=0$ を中心とする区間 $|x|<r$ の幅 r をどんなに小さく取っても $x=0$ の右側では $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ であって、0 にはならないからである。

6.5　第 6 節のまとめ

- $x=a$ における n 次までのテイラー展開は、n を固定して x を a に近づけるときの近似だが、x を固定して $n\to\infty$ とすると元の函数に収束する場合がある：

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots \quad (|x|<1)
\end{aligned}$$

  そのような函数を実解析函数という。
- 実解析函数はすべて何回でも微分可能であるが、何回でも微分可能であるのに実解析的でない函数も存在する。
- 任意の複素数 z に対して

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

  と定義する。すると複素数の範囲でも指数法則 $e^{z+w}=e^z e^w$ が成り立つ。また任意の実数 θ に対して

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

  であることが証明出来る。(Euler の公式)
- Euler の公式を用いて

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}}$$

  が示せる。これを用いると三角函数の計算はすべて指数函数の計算に帰着する。

7　２変数函数とそのグラフ

7.1　１変数の世界と２変数の世界の比較

	１変数の世界	２変数の世界
一般の函数	変数 x の函数 $f(x)$	変数 $x,\,y$ の函数 $f(x,\,y)$
そのグラフ	xy 平面上の曲線 $y=f(x)$	xyz 空間内の曲面 $z=f(x,\,y)$
１次函数	$f(x)=ax+b$	$f(x,\,y)=ax+by+c$
そのグラフ	xy 平面上の直線 $y=ax+b$	xyz 空間内の平面 $z=ax+by+c$

7.2　２変数の２次函数

7.2.1　２変数２次函数の例 $f(x,\,y)=x^2+y^2$

２変数函数の例としてまず、

$$f(x,\,y)=x^2+y^2 \tag{44}$$

について考えよう。２変数函数を表す記号は初めてかもしれないが、１変数の時に例えば $f(x)=x^2$ の時の、例えば $f(-1)$ とは、x^2 の x に -1 を代入したもの、即ち、

$$f(-1)=(-1)^2=1$$

のことだったのと同様、例えば $f(x,\,y)=x^2+y^2$ の時の、例えば $f(-1,\,3)$ とは、x^2+y^2 の x に -1 を代入し、y に 3 を代入したもの、即ち

$$f(-1,\,3)=(-1)^2+3^2=10$$

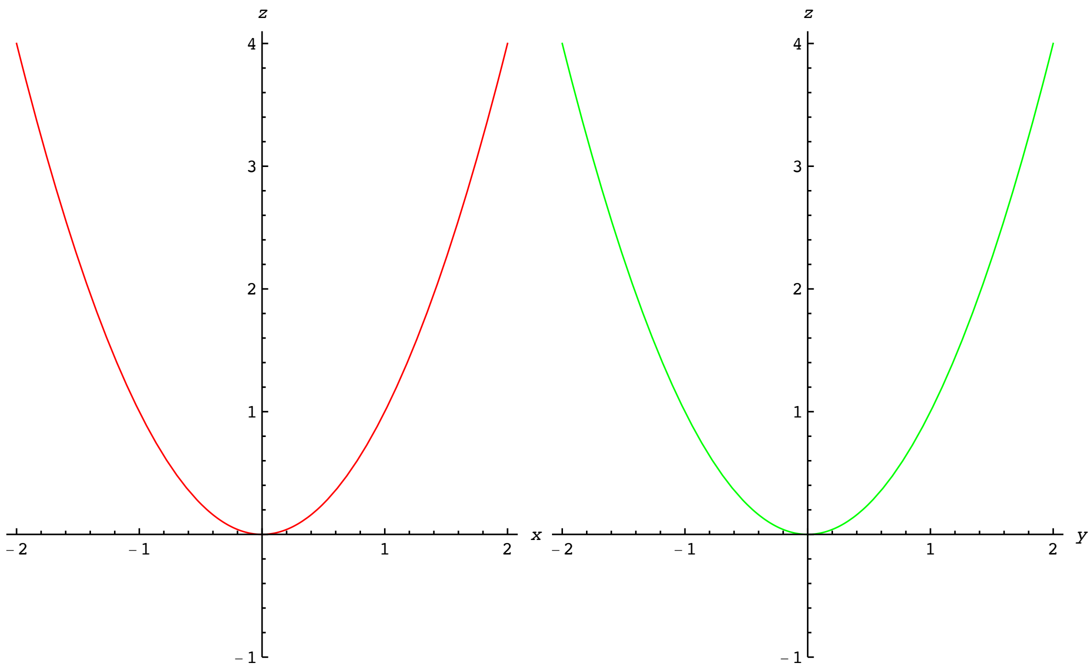
のことである。

7.2.2　グラフの等高線と見取り図

１変数函数 $f(x)=x^2$ を視覚化するために xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を考えたように、２変数函数 $f(x,\,y)=x^2+y^2$ を視覚化するために xyz 空間内の図形 $z=x^2+y^2$ を考える。つまり xyz 空間上の点であって $z=x^2+y^2$ を満たすような点全体のなす集合を考える。これを函数 $f(x,\,y)=x^2+y^2$ のグラフという。$z=x^2+y^2$ が xyz 空間の中でどんな図形になっているかを見よう。まず、xyz 空間内の点で $y=0$ を満たす点の全体がちょうど xz 平面になっていることは、周知であろう。従って、$z=x^2+y^2$ かつ $y=0$ を満たす点の全体を考えれば、これがちょうど $z=x^2+y^2$ の xz 平面による切り口になっているはずである。

$$「z=x^2+y^2 \text{かつ}\ y=0」\Longleftrightarrow「z=x^2 \text{かつ}\ y=0」$$

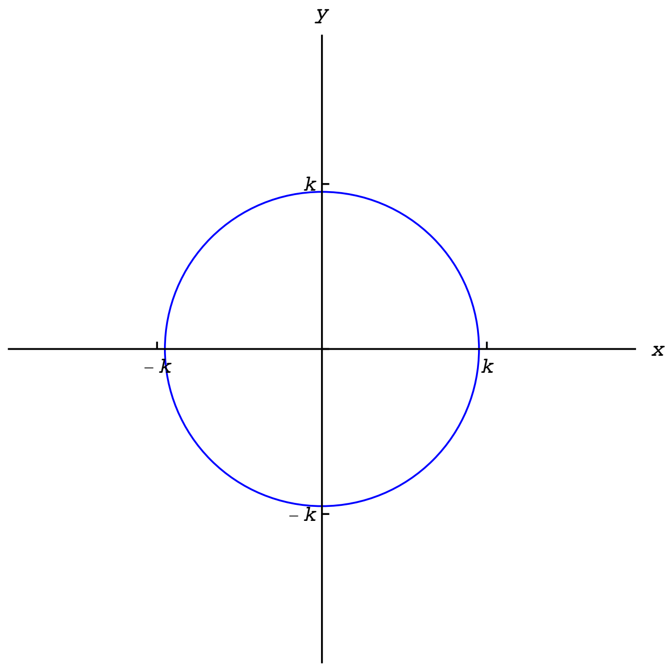
であるので、これは、xz 平面上の放物線 $z = x^2$ である。同様にして、$z = x^2 + y^2$ の yz 平面による切り口は yz 平面上の放物線 $z = y^2$ になっていることもわかる：



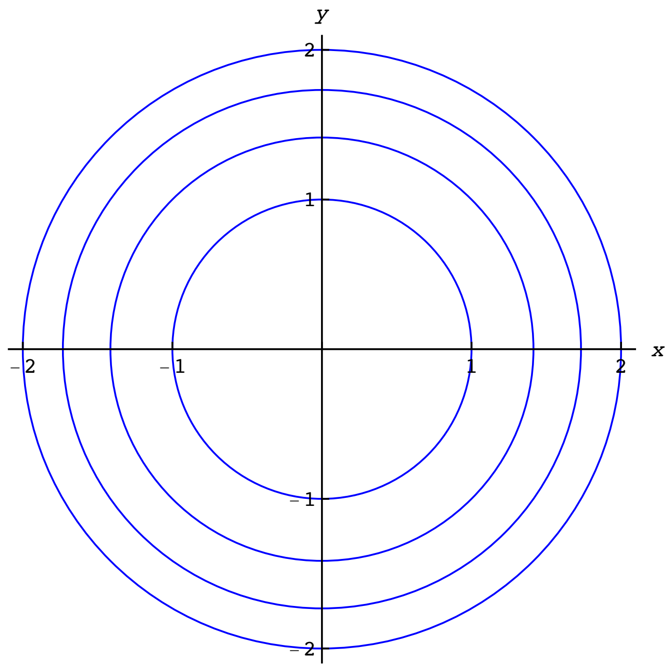
一方、xyz 空間の中で xy 平面に平行な平面 $z = k$（k は定数）による $z = x^2 + y^2$ の切り口は、$z = k$ かつ $x^2 + y^2 = k$ を満たす点の全体なので、平面 $z = k$ 上で

$$\begin{cases} k < 0 \text{ の時は空集合} \\ k = 0 \text{ の時は原点 } (0,\ 0) \\ k > 0 \text{ の時は原点 } (0,\ 0) \text{ を中心とする半径} \sqrt{k} \text{の円 } x^2 + y^2 = k \end{cases}$$

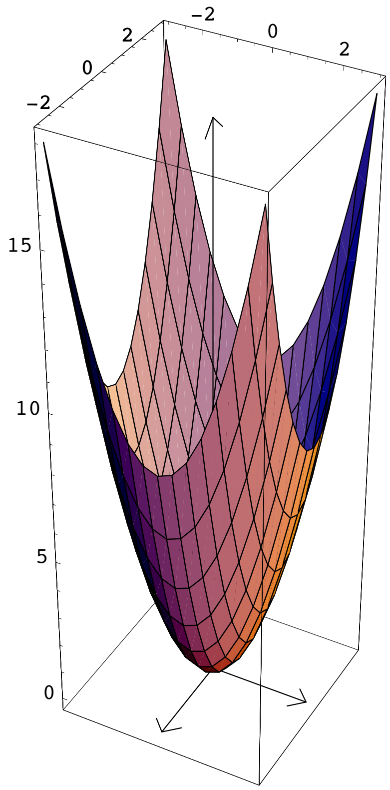
となる：



k が色々な値を取る時の平面 $z = k$ による切り口（高さ k の等高線）をひとつの xy 平面上に図示したものが所謂「等高線図」である。



以上で曲面 $z = x^2 + y^2$ のイメージがつかめたであろうか。見取り図を描くと次のようになる。(回転放物面)



7.3 ２変数の１次函数

7.3.1 ２変数１次函数の例

２変数１次函数の例として

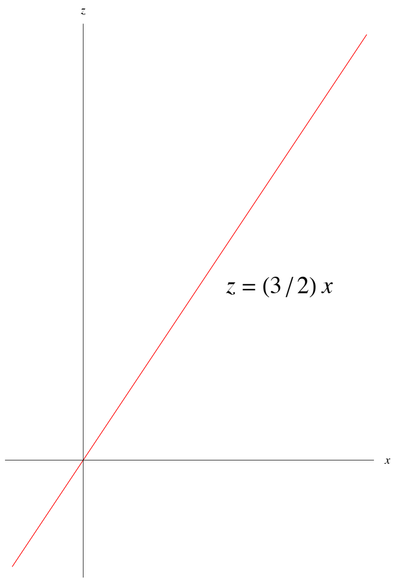
$$f(x,\, y) = \frac{3}{2}x + 2y \tag{45}$$

のグラフ

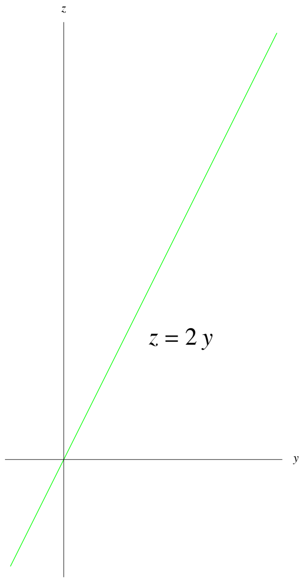
$$z = \frac{3}{2}x + 2y$$

について考えよう。

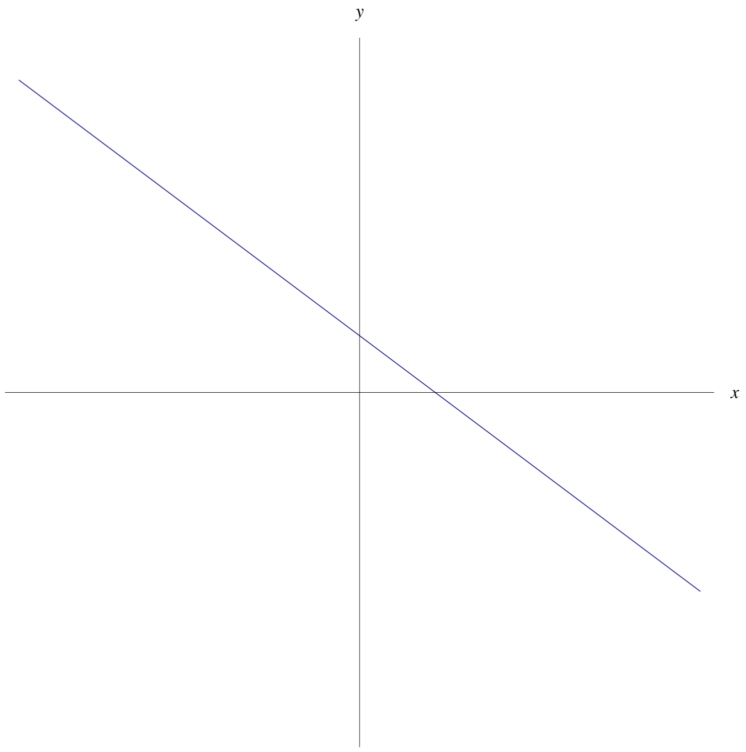
$z = x^2 + y^2$ のときと同様に xz 平面（即ち平面 $y = 0$）による切り口を考えれば、$z = \dfrac{3}{2}x + 2y$ に $y = 0$ を代入して xz 平面上の直線 $z = \dfrac{3}{2}x$ を得る：



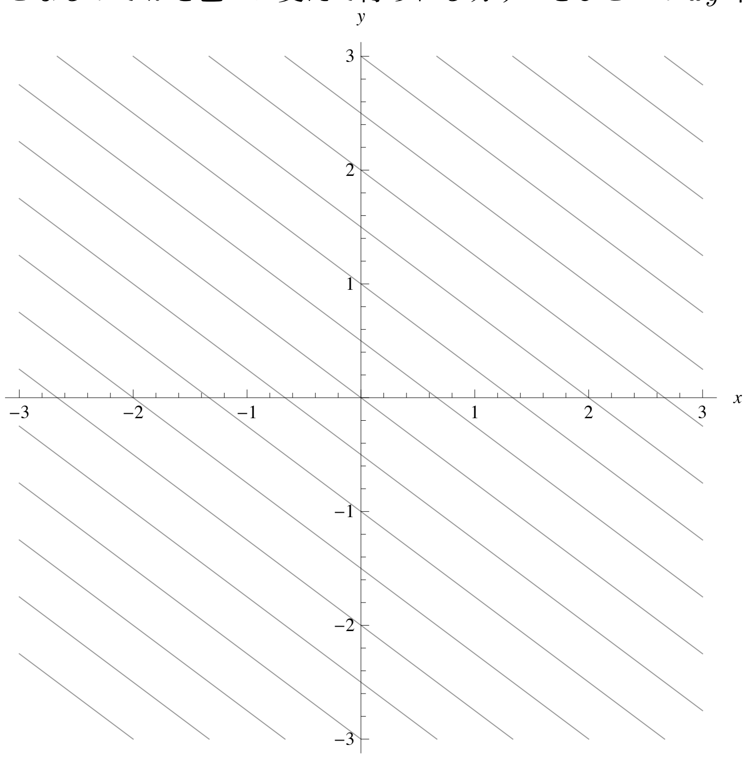
また yz 平面（即ち平面 $x=0$）による切り口を考えれば、$z=\dfrac{3}{2}x+2y$ に $x=0$ を代入して yz 平面上の直線 $z=2y$ を得る：



また xy 平面に平行な平面 $z=k$ で切った切り口は、平面 $z=k$ 上の直線 $\frac{3}{2}x+2y=k$

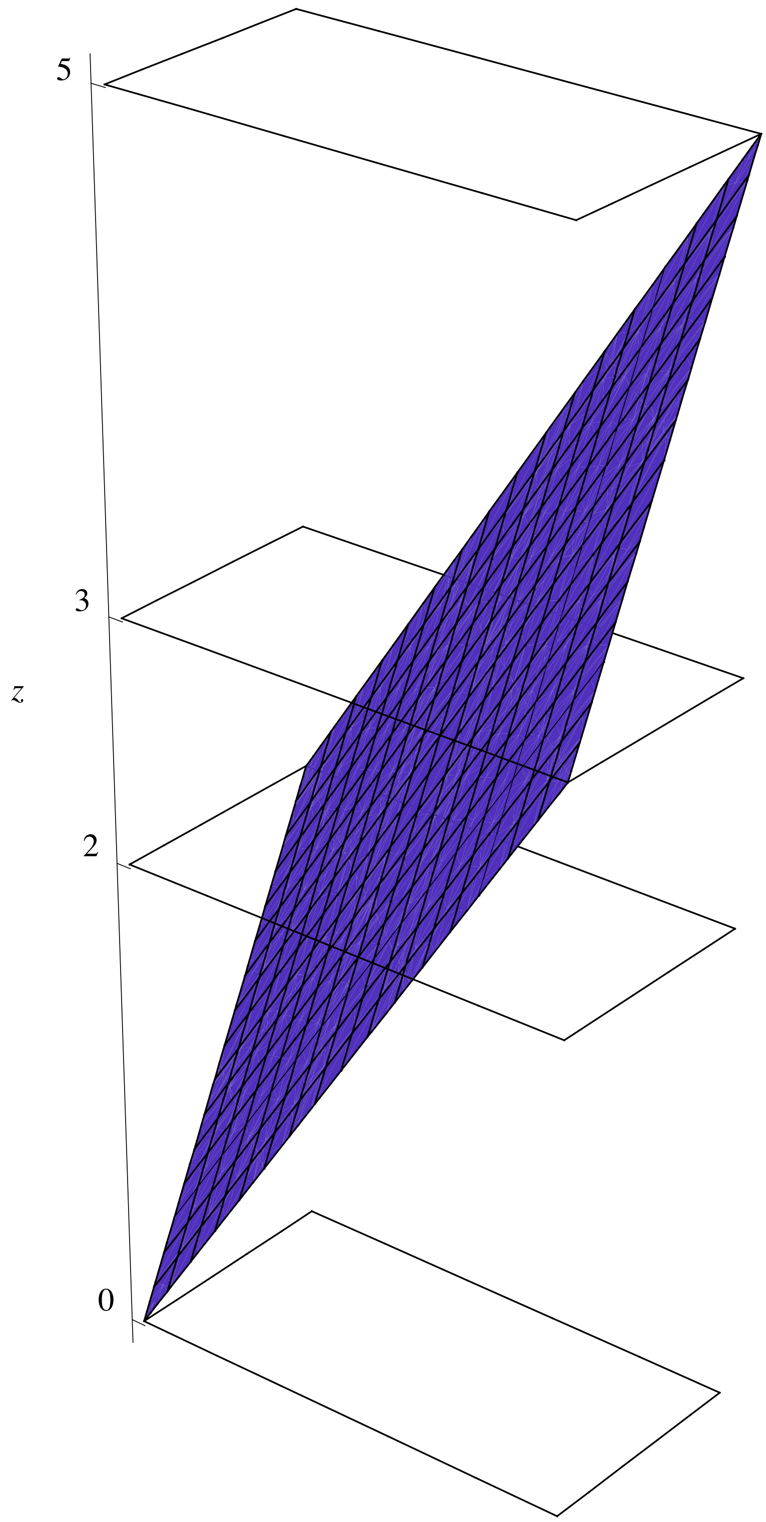


となるので k を色々に変えて得られる切り口をひとつの xy 平面上に書いた



が図形 $z = \frac{3}{2}x + 2y$ の等高線図である。地図の見方がわかる人にはこれが「平らな坂」すなわち平面であることがわかるはずである：

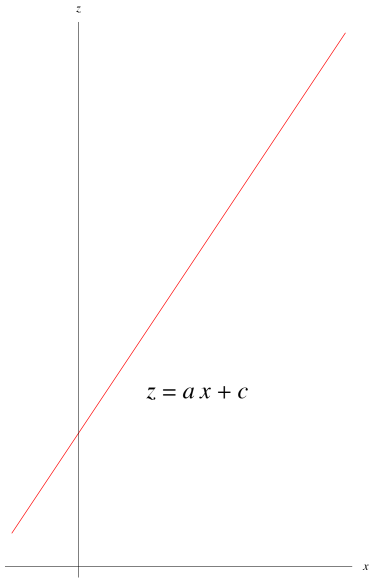
問 12. 2 変数 1 次函数のグラフ $z = \dfrac{3}{2}x + 2y$ のうち $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ の部分の「原点から $(1, -1, 1)$ 方向に十分遠くに離れた点（例えば $(100, -100, 100)$ のような点）から見た」見取り図を描け。(「原点 $\cdots$ 見た」の部分の意味がわからない人は、ともかく見取り図を描くこと。)


5
3
z
2
0

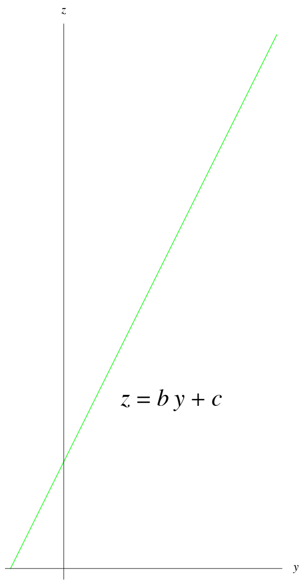
7.3.2　一般の２変数１次函数とそのグラフ

a, b, c が定数とするとき、２変数 x, y の函数 $f(x, y) = ax + by + c$ を（２変数）１次函数と呼ぶ。前節の例は $a = \frac{3}{2}$, $b = 2, c = 0$ のときにあたる。a, b, c が他の値であっても前節と同様の議論が出来る。

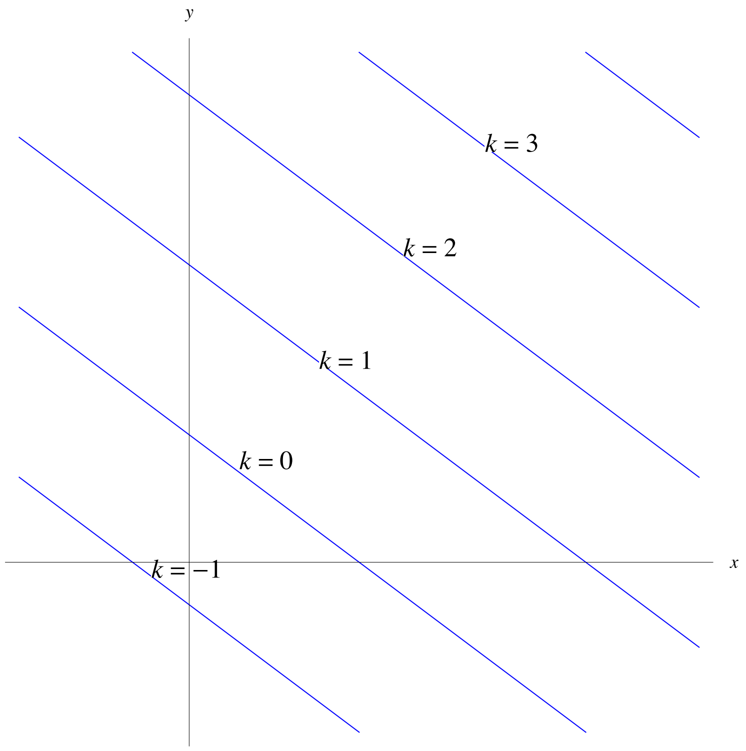
１次函数 $f(x, y) = ax + by + c$ のグラフ $z = ax + by + c$ の xz 平面 $y = 0$ による切り口は $z = ax + by + c$ に $y = 0$ を代入した $z = ax + c$ である。これは xz 平面上の傾き a の直線である：



$z = ax + by + c$ の yz 平面 $x = 0$ による切り口は $z = ax + by + c$ に $x = 0$ を代入した $z = by + c$ である。これは yz 平面上の傾き b の直線である：



$z = ax + by + c$ の平面 $z = k$ による切り口は xy 座標だけに着目するなら xy 平面上の直線 $ax + by + c - k = 0$ である。これが高さ k の等高線である。これをひとつの xy 平面上に色々な k の値について図示すれば $z = ax + by + c$ の等高線図になるわけである。



7.3.3 与えられた点を通り与えられた傾きを持つ直線・平面の方程式

一般に 1 次函数 $f(x) = ax + b$ のグラフ $y = ax + b$ は y 軸上の点 $(0, b)$ を通り傾き a の直線である。同様に 2 変数 1 次函数 $f(x, y) = ax + by + c$ のグラフ $z = ax + by + c$ は z 軸上の点 $(0, 0, c)$ を通り x 方向の傾きが a、y 方向の傾きが b の平面である。

点 (α, β) を通り、傾きが a の直線の方程式は $y = a(x - \alpha) + \beta$

点 (α, β, γ) を通り、x 方向の傾きが a y 方向の傾きが b の平面の方程式は $z = a(x - \alpha) + b(y - \beta) + \gamma$

問 **13.** (1) 平面状の坂があり、東向きの傾きが 0、北向きの傾きが 1 とするとき、北東向きの傾き（即ち北東に向かって 1 進んだときどれだけ上がるか）を答えよ。

(2) 平面 $z = A + Bx + Cy$ の $(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向の傾き（$(\cos\theta, \sin\theta)$ だけ進んだときどれだけ上がるか）を答えよ。

7.4　第 7 節のまとめ

- ２変数函数 $f(x,y)$ のグラフは xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ である。
- xy 平面上の曲線 $f(x,y)=k$ を、函数 $f(x,y)$ の高さ k の等高線と言う。
- 函数 $f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ の形状は等高線図から把握できる。
- ２変数 1 次函数 $f(x,y)=ax+by+c$ のグラフは xyz 空間内の平面 $z=ax+by+c$ である。ここで a は x 方向の傾き、b は y 方向の傾きである。
- 点 (α,β,γ) を通り、$\begin{array}{c} x \text{ 方向の傾きが } a \\ y \text{ 方向の傾きが } b \end{array}$ の平面の方程式は $z=a(x-\alpha)+b(y-\beta)+\gamma$

8　２変数函数の１次近似

8.1　２変数２次函数の１次近似の例

さて、話を元に戻して、

$$x = 1 + (x-1),\ y = 1 + (y-1)$$

として、(44) に代入して展開すると、

$$\begin{aligned} f(x,\,y) = x^2 + y^2 &= \{1 + (x-1)\}^2 + \{1 + (y-1)\}^2 \\ &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + 1 + 2(y-1) + (y-1)^2 \\ &= 2 + 2(x-1) + 2(y-1) + (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{aligned}$$

となる。

今、点 $(x,\,y)$ が点 $(1,1)$ に非常に近い時、言い換えると点 $(x,\,y)$ と点 $(1,1)$ との距離 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ が非常に小さいときを考えよう。

$$\begin{aligned} |x-1| &= \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ |y-1| &= \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

であるので、$x-1$ や $y-1$ の絶対値も非常に小さく、$2(x-1)$ や $2(y-1)$ の絶対値もまた非常に小さいが、$(x-1)^2$ 及び $(y-1)^2$ の絶対値は、$2(x-1)$ や $2(y-1)$ の絶対値よりもまた更に、桁違いに小さい。従って、点 $(x,\,y)$ が点 $(1,1)$ に非常に近い時には、$(x-1)^2 + (y-1)^2$ の部分を取り去った

$$2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

で元の函数 $f(x,\,y) = x^2 + y^2$ を近似するのは有効であると考えられる。即ち (x,y) が $(1,1)$ に近いとき

$$x^2 + y^2 \fallingdotseq 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

である。

注 10. この「≒」(nearly equal) の正確な意味（定義）は１変数の時と同様、極限を用いて定式化される。（定義７参照。）

１変数のとき、例えば、x が１に近いとき

$$x^2 \fallingdotseq 1 + 2(x-1)$$

であることが、図形的には、曲線 $y = x^2$ の $x = 1$ における接線が $y = 1 + 2(x-1)$ であることに対応していた。それでは、(x,y) が $(1,1)$ に近いとき

$$x^2 + y^2 \fallingdotseq 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

であることは図形的には何を意味するのだろうか？

8.1.1 グラフの様子

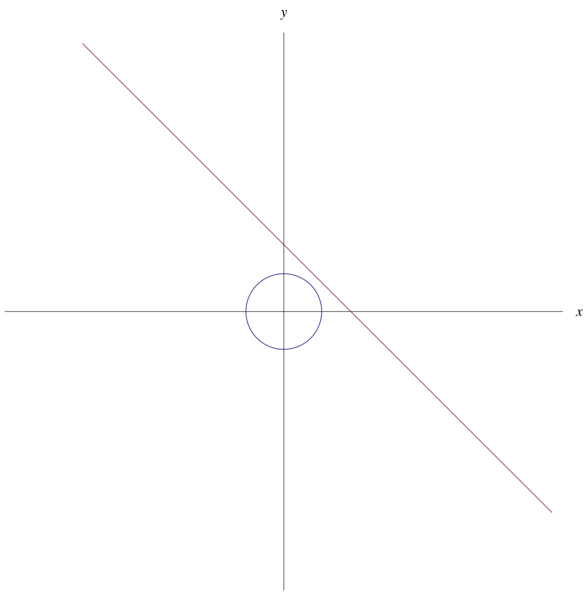
回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$ の位置関係を見るためにこれらの平面 $z = k$（k は定数）による切り口を求めるとそれぞれ

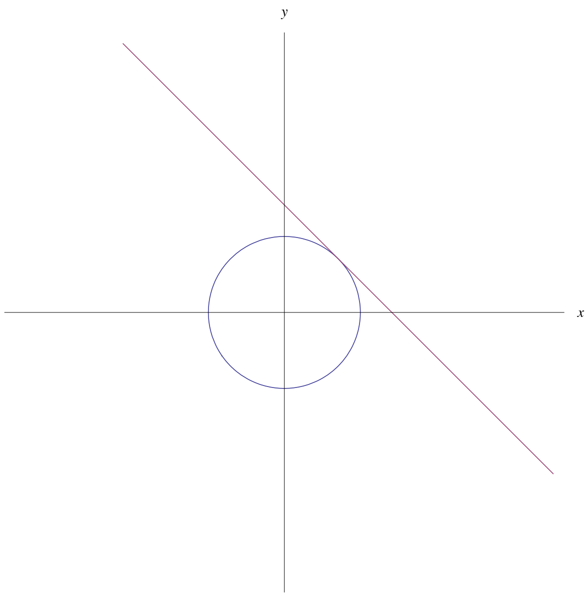
$$\begin{aligned} &k = x^2 + y^2 \\ &k = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) \end{aligned}$$

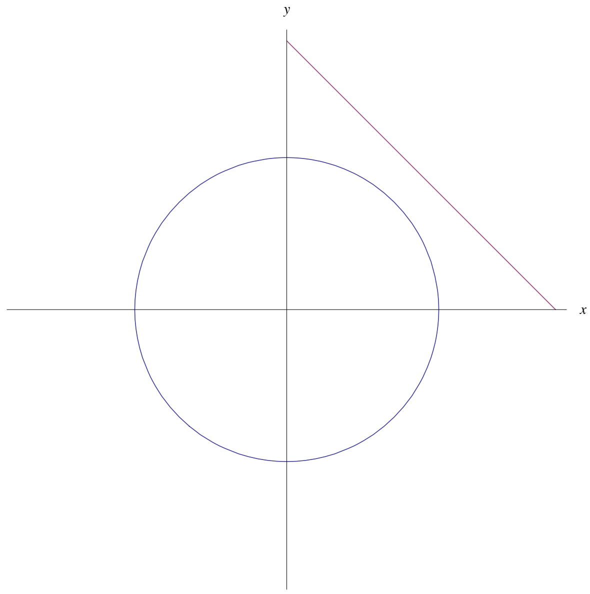
言い換えると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k \left(\begin{cases} k \geq 0 \text{ のとき　原点を中心とする半径 } \sqrt{k} \text{ の円} \\ k < 0 \text{ のとき　空集合} \end{cases} \right) \\ \frac{x + y - 1 - \frac{k}{2}}{\sqrt{2}} &= 0 \quad \left(\text{原点から距離} \frac{\left|1 + \frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}} \text{の直線} \right) \end{aligned}$$

となる。k の値を色々と変えて断面図を描くと以下のようになる：







$$
\begin{aligned}
\bigl(\text{原点と直線の距離}\bigr)^2 - (\text{円の半径})^2 &= \left(\frac{\left|1+\frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{k})^2 \\
&= \frac{\left(1+\frac{k}{2}\right)^2}{2} - k = \frac{(k+2)^2}{8} - k = \frac{k^2+4k+4-8k}{8} \\
&= \frac{(k-2)^2}{8} \geq 0 \ (\text{等号は } k=2 \text{ のとき})
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\bigl(\text{原点と直線の距離}\bigr) \geq (\text{円の半径}) \quad (\text{等号は } k=2 \text{ のとき})
$$

以上のことから元の函数 $f(x,y) = x^2+y^2$ のグラフである回転放物面 $z = x^2+y^2$ と x^2+y^2 を $(x,y) = (1,1)$ の近くで近似する 1 次函数 $2+2(x-1)+2(y-1)$ のグラフである平面 $z = 2+2(x-1)+2(y-1)$ とは $(x,y)=(1,1)$ でのみ共有点を持ち、この点で接していることがわかる。

注 11. 上記で「接していることがわかる」と書いているが、それが本当かどうかは「接している」をどう定義するかに依存する。69 参照。

8.2　２変数函数の極限・連続性

注 **12.** ２変数函数の極限・連続性については、例えば杉浦 pp.50-64 または小林「続」pp.2-6 を参照せよ。(ただし、両者とも函数の極限の定義は数列の極限を用いず直接に定義するものであって、ここでの定義とは見かけ上異なる。)

8.2.1　２変数函数の極限

動点 (x,y) が定点 (a,b) に限りなく近づくと函数 $f(x,y)$ が定数 α にいくらでも近づくとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$$

と書き、「$(x,y)\to(a,b)$ のとき $f(x,y)$ は α に収束する」などと言う。

この説明で満足した人は 8.2.2 はとばして 8.2.3 に進んでもよいと思う。

8.2.2　２変数函数の極限の定義

xy 平面上の有限個または無限個の点を選んで番号付けしたものを点列と呼ぶ。点列は数列の２次元版である。点列 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$ の x 成分だけをこの順に取り出した $x_0,x_1,x_2,\cdots$ は数列であり、y 成分だけを取りだした $y_0,y_1,y_2,\cdots$ も数列である。点列の極限は以下のように数列の極限を用いて定義される：

定義 4 (点列の極限)**.** 点列 (x_n,y_n) が点 (a,b) に収束することを

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (a,b) \Leftrightarrow |(x_n,y_n)-(a,b)| = \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} \to 0 \ \ (n\to\infty)$$

で定義する。(定義 4 終)

２変数函数の極限を（ここでは）点列の極限を用いて以下のように定義する：

定義 5 (２変数函数の極限の定義)**.**

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha \Leftrightarrow \text{点 } (a,b) \text{ に収束する任意の点列 } (x_n,y_n) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \alpha$$

(定義 5 終)

極限を取るときの (x,y) の変域が平面全体でなく、その部分集合 A のときは

定義 6.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b),\\ (x,y)\in A}} f(x,y) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \text{点 } (a,b) \text{ に収束し、各点が } A \text{ に属する任意の点列 } (x_n,y_n) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \alpha$$

(定義 6 終)

8.2.3　2変数函数の連続性

与えられた2変数函数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において連続であるとは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であることである。いま考えている範囲の各点で連続な函数を、連続函数と呼ぶ。極限の定義を用いると以下のようなことが簡単に証明できる：

- x の連続函数は x, y の函数としても連続である。例 e^x は2変数 x, y の連続函数
- 連続函数同士の和・差・積もまた連続函数である。連続函数同士の商は分母が0になる点を除いて連続である。
- 連続函数の変数に連続函数を代入したものもまた連続函数である。

問 **14.** 8.2.2をとばさずに読んだ人は、上記を証明してみよ。ただし、収束する数列の和・差・積・商がそれぞれの数列の極限の和・差・積・商になる（ただし分母の極限値が0の場合を除く）ことは前期にやったので証明なしに用いてよい。

8.3　2変数函数の1次近似の定義

1変数のとき、連続函数 $f(x)$ に対して

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq A + B(x-a)$$

であること、即ち $A + B(x-a)$ が $f(x)$ の $x \to a$ のときの1次近似であることを

$$f(x) = A + B(x-a) + R(x) \text{ とすると } \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

であることとして定義した。

2変数の場合も同様に、

定義 7 (1次近似)**.** 与えられた連続函数 $f(x,y)$ に対して

$$(x,y) \to (a,b) \text{ のとき } f(x,y) \fallingdotseq A + B(x-a) + C(y-b)$$

であること、即ち「$A + B(x-a) + C(y-b)$ が $f(x,y)$ の $(x,y) \to (a,b)$ のときの1次近似である」ことを

$$f(x,y) = A + B(x-a) + C(y-b) + R(x,y) \text{ とすると } \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

であることとして定義する。（定義7終）

つまり、1変数の場合同様、$(x,y) \to (a,b)$ のとき元の $f(x,y)$ と1次函数 $A + B(x-a) + C(y-b)$

との差 $R(x,y)$ が、点 (x,y) と点 (a,b) との距離と較べて無視できるほど小さくなる場合に、$A+B(x-a)+C(y-b)$ が $f(x,y)$ の $(x,y)\to(a,b)$ のときの 1 次近似であるというわけである。

例 **1.** $f(x,y)=x^2+y^2$ とすると $(x,y)\to(1,1)$ のとき $x^2+y^2 \fallingdotseq 2+2(x-1)+2(y-1)$ である。実際、$x^2+y^2=2+2(x-1)+2(y-1)+R(x,y)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(1,1)|} &= \frac{x^2+y^2-(2+2(x-1)+2(y-1))}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\\ &= \frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\\ &= \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \to 0 \ \ ((x,y)\to(1,1))\end{aligned}$$

(例 1 終)

さて、1 変数の場合、与えられた任意の連続函数 $f(x)$ に対して

$$「x\to a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq A+B(x-a)」\Rightarrow A=f(a), B=f'(a)$$

が示せるのであった。(1.4.2 参照。) つまり、1 次近似が存在するとすればその形は

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a) \ \ (x\to a)$$

に決まってしまうのであった。2 変数の場合はどうであろうか:

$$\boxed{「(x,y)\to(a,b) \text{ のとき } f(x,y)\fallingdotseq A+B(x-a)+C(y-b)」\Rightarrow A=?, B=?, C=?}$$

実は

$$(x,y)\to(a,b) \text{ のとき } f(x,y)\fallingdotseq A+B(x-a)+C(y-b)$$

の y を b に固定した特別の場合として

$$x\to a \text{ のとき } f(x,b)\fallingdotseq A+B(x-a)$$

を含意するので $f(x,b)=g(x)$ とおくと 1 変数のときの結果から $A=g(a)=f(a,b), B=g'(a)$ でなければならない。

注 **13.** 上で述べたことをきちんと証明すると以下のようになる:
「$(x,y)\to(a,b)$ のとき $f(x,y)\fallingdotseq A+B(x-a)+C(y-b)$」の定義は

$$f(x,y)=A+B(x-a)+C(y-b)+R(x,y) \text{ とすると } \lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|}=0$$

である。「$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|}=0$」は $(x,y)\to(a,b)$ である限りいかなる近づき方をしても $\dfrac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|}\to 0$ であるという意味であって、そのうちの特殊なケースとして y を最初から最後まで b に固定して $x\to a$ という場合を含む。その場合も $\dfrac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|}\to 0$ でなければならない。即ち

$$f(x,b)=A+B(x-a)+C(b-b)+R(x,b) \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{R(x,b)}{|(x,b)-(a,b)|}=0$$

いいかえると

$$f(x,b)=A+B(x-a)+R(x,b) \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{R(x,b)}{|x-a|}=0$$

である。今 $f(x,b)=g(x)$ とおくと $g(x)$ は連続であって

$$g(x)=A+B(x-a)+R(x,b) \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{R(x,b)}{|x-a|}=0$$

であるので、1 変数のときの結果から $A=g(a)=f(a,b), B=g'(a)$ でなければならない。(証明おわり)

また $y=b$ の代わりに $x=a$ を最初から代入して同様にすれば、$f(a,y)=h(y)$ とおくとき $A=h(b)=f(a,b), C=h'(b)$ を得る。ここで偏微分の概念が必要になるので導入しよう。

8.4 偏微分の定義

y は定数だと思って $f(x,y)$ を x について微分したものを $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と書き、$f(x,y)$ の x による偏微分あるいは偏導函数と呼ぶ。

注 14. 正式な定義は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

である。$f(x,y)$ が (x,y) の範囲により場合分けして定義されている場合などは、この正式な定義に従って計算する必要が生じる場合もある。

例題 1. $f(x,y)=x^2+x^2y^3+y^4$ とするとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ計算せよ。

注 15. 上のように $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ の代わりに $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と書くことがよくある。記号の濫用であるが、実際にはよく使われている。一方 $z=f(x,y)$ のときに $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ の代わりに $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と書くこともあり、これは記号の濫用ではない。$z=f(x,y)$ なのだから $\dfrac{\partial(f(x,y))}{\partial x}$ と書いても良いことになり、それは実際そうである。また、$\dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y))$ と書いてもよく、$f(x,y)$ の部分が長い式のときにはよく使われる。

<u>解説</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+x^2y^3+y^4\right)\\
&=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x}+\frac{\partial(y^4)}{\partial x} \quad \text{(微分の線型性(足し算は分かれる))}\\
&=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+y^3\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+y^4\frac{\partial(1)}{\partial x} \quad \text{(微分の線型性(定数は前に出る))}\\
&=2x+y^3\cdot 2x+y^4\cdot 0=2x+2xy^3
\end{aligned}$$

注 16. 説明のためにこのように書いたが、演習の解答などでは、$f(x,y)$ が多項式の場合なら「$\dfrac{\partial f}{\partial x}=$」の直後に最後の答を書くのが普通だろう。

注 17. 演習などで $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2y^3+y^4)$ でなく $(x^2+x^2y^3+y^4)'$ と書く人がいるが、これはやめた方がよい。$\dfrac{\partial}{\partial x}$ の意味か $\dfrac{\partial}{\partial y}$ の意味か他人から見てはっきりしないだけでなく、自分でもわからなくなって間違える危険性大である。

問 15. 上の $f(x,y)$ について、以下に答えよ：

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ。

(2) a,b を定数とするとき $f(x,b)=g(x), f(a,y)=h(y)$ とおくとき $g'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,b), h'(y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,y)$ であることを計算で確かめよ。

(3) $z=g(x)$ は曲面 $z=x^2+x^2y^3+y^4$ の平面 $y=b$ による切り口である。以下 $a=1,b=1$ としよう。曲線 $z=g(x)$ の $x=a$ における接線の方程式を求め、元の曲線 $z=g(x)$ と同じ xz 平面上に図示せよ。

8.5　２変数函数の１次近似と偏微分係数との関係

$f(x,b)=g(x)$ とおいたときの $g'(x)$ は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,b)$ と一致する。(y に先に定数 b を代入してから x について微分しても y を定数だと思って x について微分した後で y に b を代入しても結果は同じ。）従って $B=g'(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ である。同様にして $C=h'(a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ であることがわかる。まとめると、与えられた任意の連続函数 $f(x,y)$ に対して

$$「(x,y)\to(a,b) \text{ のとき } f(x,y)\fallingdotseq A+B(x-a)+C(y-b)」$$
$$\Rightarrow A=f(a,b), B=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), C=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

が証明されたことがらである。次に以上のことを幾何学的に見てみよう。

8.6 接平面

1 変数函数 $f(x)$ の $x \to a$ における 1 次近似 $f(a)+f'(a)(x-a)$ のグラフである

$$\text{直線 } y = f(a)+f'(a)(x-a)$$

が曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線であったのと同様に、2 変数函数 $f(x,y)$ の $(x,y)\to(a,b)$ における 1 次近似 $f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ のグラフである

$$\text{平面 } z = f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

を曲面 $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における接平面と定義する。

	1 変数の世界	2 変数の世界
一般の函数	変数 x の函数 $f(x)$	変数 $x,\ y$ の函数 $f(x,\ y)$
そのグラフ	xy 平面上の曲線 $y=f(x)$	xyz 空間内の曲面 $z=f(x,\ y)$
1 次近似	$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)\ (x\to a)$	$f(x,\ y)\fallingdotseq f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\ ((x,y)\to(a,b))$
そのグラフ	曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$	曲面 $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における接平面 $z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

問 16. (1) $f(x,y)=x^2+x^2y^3+y^4$ の $(x,y)\to(1,2)$ のときの 1 次近似を求めよ。

答：$x^2+x^2y^3+y^4\fallingdotseq$

計算：

(2) $z=x^2+x^2y^3+y^4$ の $(x,y)=(1,2)$ における接平面の方程式を $\cdots=0$ の形で答えよ。

8.7 第 8 節のまとめ

- $f(x,y)$ が点 (a,b) で連続 $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$
- $A + B(x-a) + C(y-b)$ が $(x,y) \to (a,b)$ のときの $f(x,y)$ の 1 次近似であることを $\boxed{f(x,y) = A + B(x-a) + C(y-b) + R(x,y) \text{ とするとき } \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0}$ と定義する。
- $\boxed{\begin{array}{c} z = A + B(x-a) + C(y-b) \text{ が } (x,y) = (a,b) \text{ における } z = f(x,y) \text{ の接平面} \\ \Leftrightarrow\ A + B(x-a) + C(y-b) \text{ が } (x,y) \to (a,b) \text{ のときの } f(x,y) \text{ の 1 次近似} \end{array}}$
  で接平面の概念を定義する。
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(y \text{ は定数だと思って } f(x,y) \text{ を } x \text{ について微分したもの}\big) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(x \text{ は定数だと思って } f(x,y) \text{ を } y \text{ について微分したもの}\big) \end{cases}$
- $\boxed{\begin{array}{c} z = A + B(x-a) + C(y-b) \text{ が } (x,y) = (a,b) \text{ における } z = f(x,y) \text{ の接平面} \\ \Rightarrow A = f(a,b), B = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), C = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{array}}$
  あるいは同じことだが
  $\boxed{\begin{array}{c} A + B(x-a) + C(y-b) \text{ が } (x,y) \to (a,b) \text{ のときの } f(x,y) \text{ の 1 次近似} \\ \Rightarrow A = f(a,b), B = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), C = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{array}}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ は、点 (a,b) における x 方向の接線の傾き、それはまた点 (a,b) における接平面が存在する場合には接平面の x 方向の傾きを表している。$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ についても同様である。
- $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (a,b)$ における接平面が存在すればその方程式は

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

9　２変数函数の微分可能の定義

9.1　２変数函数の微分可能の定義

定義 **8** (（全）微分可能性)**.** 与えられた連続函数 $f(x,y)$ に対して、

$$(x,y) \to (a,b) \text{ のとき } f(x,y) \fallingdotseq A + B(x-a) + C(y-b)$$

となる定数 A,B,C が存在するとき、$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で 1 次近似可能あるいは全微分可能あるいは単に微分可能と言う。言い換えれば $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において微分可能であるとは、A,B,C をうまく選ぶことにより、

$$R(x,y) := f(x,y) - \{A + B(x-a) + C(y-b)\}$$

とおくとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

が成り立つように出来ることである。（定義 8 終）

注 **18.** 実質的に同じ定義が杉浦 p.120 定義 1 にある。小林「続」では 2 変数函数の微分可能性を特に定義することはしていない。

注 **19.**

9.2　偏微分可能でも微分可能とは限らない

微分可能ならば偏微分可能であるが逆は言えない。即ち $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在しても $f(x,y)$ が 2 変数函数として微分可能とは限らない。ある点で $z=f(x,y)$ の x 方向の接線と y 方向の接線が存在するからと言って、その点での接平面が存在するとは限らないから、それは当然とも言える。

9.2.1　例

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は xy 平面上のすべての点で偏微分可能だが、原点では連続ですらない。従って微分可能ではない。
実際、原点以外では

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

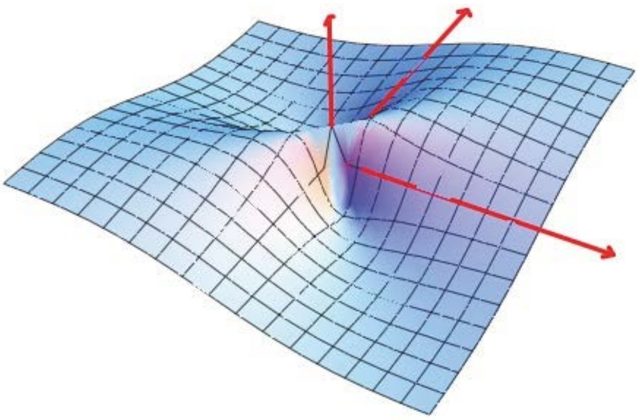
であって偏微分可能である。また、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0,\ \text{同様に} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

であるので、$f(x,y)$ は原点も含めてすべての点で偏微分可能である。一方、$f(x,y)$ が原点で連続と仮定すると $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ でなければならないが、$t \neq 0$ のとき $f(t,t) = 1$ であるので

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} f(t,t) = 1$$

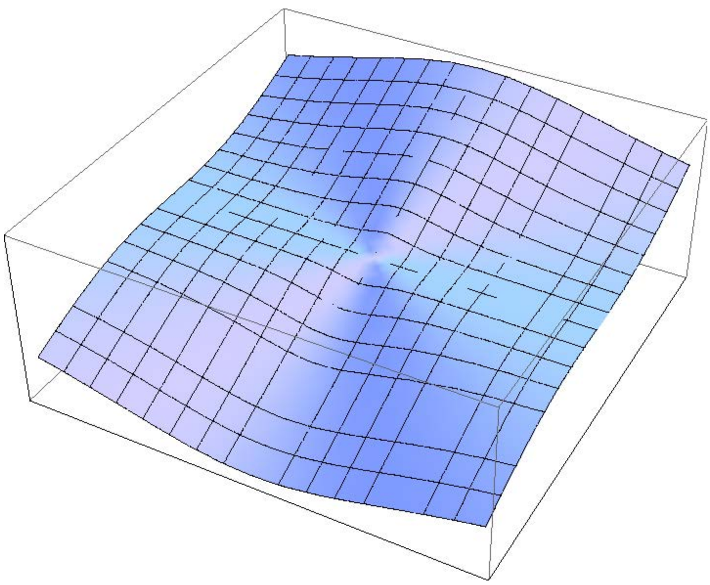
となり $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ではあり得ない。



9.2.2　例

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は xy 平面上のすべての点で偏微分可能かつ連続だが、原点では微分可能でない。原点においては x 方向や y 方向だけでなくすべての方向の接線が存在するが、それらは言わば「波打って」いて全体として平面をなしていないのである。下図参照。



問 **17.** 上記を証明せよ。

9.3 微分可能であるための十分条件

定理 **3.** xy 平面上のある領域 V で定義された函数 $f(x,y)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ が } V \text{ で存在して連続} \Rightarrow f \text{ は } V \text{ で微分可能}$$

が成り立つ。（定理 3 終）

注 **20.** 証明は大抵の教科書に書いてある。例えば杉浦 p.123 定理 5.3 を見よ。

注 **21.** 逆は必ずしも成り立たない。即ち $f(x,y)$ が微分可能でも $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が連続とは限らない。例えば杉浦 pp.89-90 例 18 を見よ。（この例は 1 変数函数だが、y に関しては定数であるような 2 変数函数と思えばそのまま 2 変数の場合の反例にもなっている。）

注 **22.** 「領域」というのがわからなければ、例えば円の内部や三角形の内部のようなものを念頭におけばよろしい。「領域」の定義は「連結な開集合」である。定理は「領域」でなく「開集合」でも実は成り立つ。「開集合」の定義が知りたければ例えば杉浦 p.66 を見よ。

定義 **9** (連続微分可能)**.** 与えられた函数 $f(x,y)$ が上記の定理の仮定を満たすとき、即ち $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が領域 V で存在して連続であるとき、$f(x,y)$ は領域 V で連続 (的) 微分可能 (**continuously differentiable**) あるいは C^1 級であると言う。（定義 9 終）

注 **23.** 良く読めばわかるように「連続微分可能」は「連続であって微分可能」ということではない。言葉に惑わされないこと。

定理 3 を用いれば、微分可能性の実用的な判定が出来る：

- x の連続微分可能函数は x,y の函数としても連続微分可能である。
  <u>例</u> e^x は $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$ も $\frac{\partial e^x}{\partial y} = 0$ も x,y の連続函数だから e^x は x,y の連続微分可能函数。
- 連続微分可能函数同志の和・差・積もまた連続微分可能函数である。（ひとつの変数を固定して考えれば積の微分によって偏微分可能であり偏導函数は 2 変数函数として連続であるから。）連続微分可能函数の商は分母が 0 になる点を除いて連続微分可能である。
- 連続微分可能函数の変数に連続微分可能函数を代入したものもまた連続微分可能函数である。（ひとつの変数を固定して考えれば合成函数の微分によって偏微分可能であり、合成函数の偏導函数は個々の函数の偏導函数の積なので 2 変数函数として連続であるから。）
- 2 変数多項式の偏微分は 2 変数多項式であって連続函数だから、任意の 2 変数多項式は連続微分可能である。
- 2 変数有理函数（即ち $\dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$）の偏微分は 2 変数有理函数であって、分母が 0 になる点を除けば連続だから、任意の 2 変数有理函数は分母が 0 になる点を除いて連続微分可能である。

問 **18.** $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ が微分可能であることを示せ。

9.4　第 9 節のまとめ

-

$$\boxed{f\text{ が微分可能 }\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\text{が存在}}$$

- xy 平面上のある領域 V で定義された函数 $f(x, y)$ に対して

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\text{が }V\text{ で存在して}\underline{\text{連続}}\ \substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\ f\text{ が }V\text{ で微分可能}}$$

が成り立つ。前者の条件を満たすとき「$f(x, y)$ は連続微分可能である」という。

10　２変数函数の最大最小問題

10.1　１変数の場合

１変数の場合、最大最小問題を解くにはグラフを描くか増減表を書くのが普通であるが、２変数函数の場合、グラフは曲面であって絵を描いたり正確に把握したりするのが難しく、「増減」に至っては２変数では無意味である。グラフも増減表も書かずに出来る次の方法が２変数の場合への一般化に適する：

例題 **2.** $f(x) = x^3 - 3x$ の $-3 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ における最大値・最小値を求めよ。

解答例

$f(x)$ は $-3 < x < \dfrac{3}{2}$ で微分可能なのでこの範囲の点 α で最大最小が起こるとすれば $f'(\alpha) = 0$ である。（命題 6 参照。）（$f'(\alpha) = 0$ となる点 α を $f(x)$ の臨界点と呼ぶ。）

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから、臨界点は $x = \pm 1$ のみ。従って、$f(x)$ の最大・最小が起こるとすれば、両端の点 $x = -3, \dfrac{3}{2}$ と臨界点 $x = \pm 1$ 以外にあり得ない。$f(x)$ が最大値・最小値を実際に取り得ることは定理 4 により保証されているから、$f(-3) = -18, f(-1) = 2, f(1) = -2, f(\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{9}{8}$ の 4 つの値のうちで一番大きい値と一番小さい値が $f(x)$ の $-3 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ における最大値と最小値である。即ち最大値は 2 で最小値は -18。

命題 **6** (最大最小のための必要条件)**.** $a < \alpha < b$ であり、$f(x)$ が $a < x < b$ で微分可能とするとき、

$$\boxed{f(x) \text{ が } x = \alpha \text{で最大または最小} \Rightarrow f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ は } f(x) \text{ の臨界点}}$$

（命題 6 終）

証明　ここでは $f'(x)$ が連続な場合に証明する。もし $f'(\alpha) \neq 0$ だとすれば $f'(\alpha) > 0$ または $f'(\alpha) < 0$ である。今、仮に $f'(\alpha) > 0$ と仮定しよう。このとき、$f'(x)$ の連続性により $x = \alpha$ を含むある範囲で $f'(x) > 0$ である。従ってその範囲で $f(x)$ は単調増加である。とすればその範囲では $x > \alpha$ のとき $f(x) > f(\alpha)$ なので $f(\alpha)$ は最大値ではあり得ない。また同じ範囲で $x < \alpha$ では $f(x) < f(\alpha)$ なので最小値でもあり得ない。$f'(\alpha) < 0$ と仮定しても同様である。従って $f(\alpha)$ が最大値または最小値であれば $f'(\alpha) = 0$ でなければならない。（命題 6 の証明終）

定理 **4** (Weierstraßによる最大値の存在定理（１次元版）)**.** 有限閉区間 $[a, b]$ で定義された連続函数 $f(x)$ には最大値が存在する。（定理 4 終）

注 **24.** 証明については、例えば杉浦 pp.67-69 の定理 7.2 および定理 7.3 を見よ。小林「読本」pp.40-42 にもある。

注 **25.** 有限でない閉区間を定義域とする連続函数には最大値がないこともある。

例 2. 無限閉区間 $0 \le x$ で定義された連続函数 $f(x) = x$ には最大値がない。($f(x)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)(例 2 終)

例 3. 無限閉区間 $1 \le x$ で定義された連続函数 $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ には最大値がない。($y = f(x)$ の値域は $0 \le y < 1$ である。)(例 3 終)

注 26. 閉区間でない有限区間を定義域とする連続函数には最大値がないこともある。

例 4. $0 < x \le 1$ は閉区間ではないが有限区間である。$0 < x \le 1$ を定義域とする連続函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ には最大値がない。($f(x)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)(例 4 終)

例 5. $0 \le x < 1$ は閉区間ではないが有限区間である。$0 \le x < 1$ を定義域とする連続函数 $f(x) = x$ には最大値がない。($y = f(x)$ の値域は $0 \le y < 1$ である。)(例 5 終)

注 27. 有限閉区間を定義域とする函数でも連続でなければ最大値がない場合もある。

例 6. 有限閉区間 $0 \le x \le 1$ で定義された函数 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{x} & (0 < x \le 1) \end{cases}$ には最大値がない。($f(x)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)(例 6 終)

例 7. 有限閉区間 $0 \le x \le 1$ で定義された函数 $f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$ には最大値がない。($y = f(x)$ の値域は $0 \le y < 1$ である。)(例 7 終)

問 19. 命題 6 と定理 4 を用いて、$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$ の $-2 \le x \le 3$ における最大値・最小値を求めよ。($f(x)$ の増減を用いてはならない。)

10.2　２変数函数の最大値の存在定理

定義 10 (閉集合)**.** xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V が、V の補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus V$ と V との境界上の点をすべて含む時、V を閉集合と言う。（定義 10 終）

注 **28.** 上では「境界」という言葉を用いているので、これをまず定義しないと「閉集合」の定義も本当はわからないが、ここでは「境界」の定義は説明しないことにする。例えば杉浦 p.268 定義 3 を参照せよ。閉集合の定義だけなら杉浦 p.66 定義 2 にもある。小林「続」p.6 にもある。

例 8 (閉集合の例・閉集合でない例)**.**

$$V = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とすると、V は V の境界すなわち単位円周 $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ 上の点をすべて含むので閉集合である。一方

$$W = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ かつ } x \neq 1\}$$

とすると W の境界も単位円周 $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ だが、W は単位円周上の点 $(1, 0)$ を含まないので閉集合ではない。（例 8 終）

定義 11 (有界)**.** xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V が有界であるとは、

$$V \subseteq \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ かつ } c \leq y \leq d\}$$

をみたすような実数 a, b, c, d が存在することである。（定義 11 終）

例 9 (有界でない集合の例)**.**

$$V = \{(x, y) | x \geq 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$$

とおくと V は有界でない。（しかし面積 $|V|$ は $|V| = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ であって有限である。）

注 **29.** V は閉集合でもある。V の境界 $\{(x, y)|(x = 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1)$ または $(x \leq 1 \text{ かつ } y = 0)$ または $(x \leq 1 \text{ かつ } y = \frac{1}{x^2})\}$ が V の部分集合だからである。

定理 5 (Weierstraßによる最大値の存在定理)**.** xy 平面上の任意の有界閉集合 V を定義域とする任意の連続函数 $f(x,y)$ には最大値が存在する。（定理 5 終）

注 30. 証明については、例えば杉浦 pp.67-69 の定理 7.2 および定理 7.3 または小林「続」p.8 の定理２を見よ。

注 31. 有界でない閉集合を定義域とする連続函数には最大値がないこともある。

例 10. $V=\mathbb{R}^2$ は閉集合だが有界でない。V で定義された連続函数 $f(x,y)=x$ には最大値がない。($f(x,y)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)（例 10 終）

注 32. 閉集合でない有界集合を定義域とする連続函数には最大値がないこともある。

例 11. $V=\{(x,y)|0<x\le 1, 0\le y\le 1\}$ は閉集合ではないが有界である。V を定義域とする連続函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x}$ には最大値がない。($f(x,y)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)（例 11 終）

注 33. 有界閉集合を定義域とする函数でも連続でなければ最大値がない場合もある。

例 12. $V=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ で定義された函数 $f(x,y)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \dfrac{1}{x} & (0<x\le 1)\end{cases}$ には最大値がない。($f(x,y)$ はいくらでも大きい値を取り得る。)（例 12 終）

10.3　２変数函数の臨界点

命題 7 (最大最小のための必要条件)**.** xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V 上で定義された函数 $f(x,y)$ に対して、

$$\begin{cases}(\alpha,\beta) \text{ が } V \text{ の内部の点で}\\ \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta), \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) \text{ が存在し}\\ f(\alpha,\beta) \text{ が } V \text{ における最大値または最小値}\end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta) \text{ は } f(x,y) \text{ の臨界点、即ち} \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)=0\end{cases}$$

証明　(α,β) が V の内部の点、即ち V に属するが V の境界上にはない点であれば、(α,β) から V の境界までの最短距離は 0 ではない。(境界は閉集合なので最短距離が存在する、というところが実はポイントである。) この最短距離を ε とすれば少なくとも直線 $y=\beta$ 上 $\alpha-\dfrac{\varepsilon}{2}\le x\le\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$ の範囲は V の部分集合である。このとき $g(x)=f(x,\beta)$ $(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\le x\le\alpha+\frac{\varepsilon}{2})$ とおくと $g(x)$ は $x=\alpha$ で最大値を取るから命題 6 により $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)=g'(\alpha)=0$ となる。同様に $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)=0$ を得る。(命題 7 の証明終)

10.4　最大最小問題の解き方

有界閉集合 D 上で定義され D 上で連続かつ D の内部のすべての点で偏微分可能な $f(x,y)$ の最大値・最小値を求めるには、以下のようにすればよろしい：

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を計算し、D の内部でそれらが存在することを確認する。

(2) x,y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.\end{cases}$$

を解いて解をすべて求め、このうち D の内部にある点 (x,y) をすべて求める。

(3) D の境界を（必要ならいくつかの部分に分割した上で）パラメタ表示する。パラメタ表示を例えば $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(a \leq t \leq b)$ とすれば、D の境界上での $f(x,y)$ の最大最小問題は一変数函数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ $(a \leq t \leq b)$ の最大最小問題に帰着する。

(4) D が有界閉集合で $f(x,y)$ が D 上で連続であることを確認する。このとき Weierstraßの定理（即ち定理 5）により $f(x,y)$ には D における最大値・最小値が存在する。即ち $f(\alpha,\beta), f(\gamma,\delta)$ が $f(x,y)$ の D での最大値・最小値となる D 上の点 $(\alpha,\beta), (\gamma,\delta)$ が存在する。(α,β) がもし D の内部にあれば、命題 7 により (2) で求めた点のリストに属する。もし D の境界にあれば $f(\alpha,\beta)$ は D の境界の中での最大値でもあるから (3) で求めた答と一致しなければならない。(γ,δ) についても同様である。従って、(2)(3) で求めた候補点の函数値をすべて求めて比較すれば、そのうちで一番大きい値が最大値、一番小さい値が最小値である。

例題 3. $f(x,y) = x^2 - y^2$ の $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ における最大値と最小値を（あれば）求めよ。

解答例（演習の解答をするときは自分の言葉で書くこと。この解答例をまねしないように。）

(1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$(0,0)$ は D の内部の点である。$f(0,0) = 0$ である。

(3) D の境界 $x^2 + y^2 = 1$ は例えば

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とパラメタ表示される。従って境界上では

$$f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

これを $g(t)$ とおくと $g'(t) = -2\sin 2t$ となる。増減表を書けば

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g(t)$	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

であるから、境界上での最小値は -1、最大値は 1 である。（この (3) の部分は増減を調べずに例題 2 のようにやっても勿論 OK。）

(4) D は有界閉集合であり、$f(x,y)$ は多項式函数だから連続なので、Weierstraßの定理により $f(x,y)$ の D における最大値および最小値が存在する。$f(x,y)$ は多項式だから偏微分可能なので D の内部で最大最小が起こるのは臨界点に限るが (2) によりそれは $(0,0)$ に限る。また D の境界で最大最小が起きるとすれば (3) によりその値は ± 1 である。

従って $f(0,0) = 0$ と ± 1 の 3 つの値のうちで最小の -1 が $f(x,y)$ の D における最小値、3 つの値のうちで最大の 1 が $f(x,y)$ の D における最大値である。

問 20. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ の $D : |y| \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を（あれば）求めよ。（ヒント：まずは D を xy 平面上に図示してから考える。D の境界は 3 つの線分からなっているので、それぞれをパラメタ表示して考える。）

10.5 第 10 節のまとめ

- 有限閉区間 $[a,b]$ で定義された連続函数 $f(x)$ には最大値・最小値が存在する (Weierstraßの定理)。更に $f(x)$ が $a < x < b$ の各点で微分可能ならば、最大最小は臨界点（$f'(x) = 0$ となる点 x）または端点 $x = a$ または $x = b$ でのみ起こる。従ってそれらの点での函数値のみを求めて比較すれば最大値・最小値が求まる。
- xy 平面上の有界閉集合 V で定義された連続函数 $f(x,y)$ には最大値・最小値が存在する (Weierstraßの定理)。更に $f(x,y)$ が V の内部のすべての点で偏微分可能ならば、最大最小は臨界点（$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点 (x,y)）または V の境界でのみ起こる。境界での最大最小は、境界をなす曲線をパラメタ表示することにより、一変数函数の最大最小問題に帰着する。

11　２変数函数のテイラー展開

11.1　高階偏導函数

一変数の場合、例えば函数 $f(x)$ に対して

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\ (=f''(x))$$

を $f(x)$ の２階導函数、

$$\frac{d^3f}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)\ (=f'''(x))$$

を $f(x)$ の３階導函数などと言うのであった。

２変数函数の場合も高階偏導函数 が同様に定義されるが、一変数のときにはなかった状況も出てくる：例えば $f(x,y)$ の２階偏導函数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

に関しても $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ の代わりに $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ の代わりに $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ と書くのは同様であるが、$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ の代わりに $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ と書くべきかそれとも $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ と書くべきか？　どちらの解釈をする人もそれぞれ少なからずいるので困るのであるが、実際には滅多に困ることはない。というのは

例題 4. $f(x,y)=x^2+xy^2+y^3$ とするとき $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ をそれぞれ計算せよ。

解答例

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2+xy^2+y^3)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial(1)}{\partial y}+x\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(y^3)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot 2y+3y^2)\\
&=2y\frac{\partial(x)}{\partial x}+3y^2\frac{\partial(1)}{\partial x}=2y\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2+xy^2+y^3)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+y^2\frac{\partial(x)}{\partial x}+y^3\frac{\partial(1)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2)\\
&=2x\frac{\partial(1)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}=2y
\end{aligned}$$

（解答例終）

つまりこの場合 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ が成り立つ。一般に $f(x,y)$ が x,y の多項式ならば、偏微分す

るときは各項を偏微分すればよいが、各項は (定数) $\times x^m y^n$ の形（単項式）をしているので

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^m y^n)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \frac{\partial(y^n)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^m \cdot n y^{n-1}) = n y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^m) = n y^{n-1} \cdot m x^{m-1} \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^m y^n)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^n \frac{\partial(x^m)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^n \cdot m x^{m-1}) = m x^{m-1}\frac{\partial}{\partial y}(y^n) = m x^{m-1} \cdot n y^{n-1} \\
\therefore\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^m y^n)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^m y^n)}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

から $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ が成り立つことがわかる。より一般に

定理 6 (Clairault)**.** xy 平面上の領域 V で定義された函数 $f(x,y)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ が存在して } V \text{ 上で連続} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

注 **34.** 証明については、例えば杉浦 pp.109-110 定理 3.2 を見よ。小林「続」pp.38-41 にもある。

も成り立つ。しかし $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ が連続でない $f(x,y)$ の中には $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \neq \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ となるものも存在する。

問 **21.** 函数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

で定義するとき $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ をそれぞれ計算せよ。（問 21 終)

そこで $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ が成り立つときには、これを $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ と書くことにしよう。($\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ と書いても当然同じ意味である。)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在していずれも連続函数であるとき、$f(x,y)$ を連続微分可能あるいは C^1 級と呼ぶのであった。そこで $f(x,y)$ が 2 階連続微分可能あるいは C^2 級であるということを、$f(x,y)$ が C^1 級であってさらに $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が存在していずれも連続函数であることとして定義する。そうすると $f(x,y)$ が 2 階連続微分可能であれば定理 6 により $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ なので、この一致する値を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ と書いてよい。この場合 2 階偏導函数は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ の 3 種類である。

さらに $f(x,y)$ が 3 階連続微分可能あるいは C^3 級というのを、$f(x,y)$ が C^2 級であって $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ が存在していずれも連続函数であることとして定義する。$f(x,y)$ が 3 階連続微分可能ならば $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$ が連続なので、定理 6 の f の代わりに $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を代入すると定理の仮定を満

たすので、$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$ であることがわかる。同様に、定理 6 の f の代わりに $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を代入して $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ を得る。このとき 3 階偏導函数は $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ の 4 種類である。

以下同様にして $f(x, y)$ が n 階連続微分可能または C^n 級であるということが定義される。$f(x, y)$ が n 階連続微分可能ならば n 階までの偏導函数はすべて存在して連続函数であり、n 階までの偏導函数については、例えば x について k 回偏微分し y について l 回偏微分する場合（ただし $k + l \leq n$）、順番に関係なく一致するのでそれを

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}$$

と書く訳である。

$f(x, y)$ がすべての自然数 n に対して n 階連続微分可能であるとき、無限階連続微分可能または無限階微分可能または C^∞ 級という。応用上出てくる具体的な函数は、例外的な点を除いて無限階微分可能（というより後で述べる「実解析的」）である場合がほとんどである。

問 **22.** $f(x, y) = e^x \cos y$ は xy 平面上の無限階微分可能函数であることを示せ。

11.2　２変数多項式のテイラー展開

$f(x, y)$ が多項式の場合は $x = a + (x - a), y = b + (y - b)$ を代入して$\underline{x - a \text{ と } y - b \text{ の多項式}}$（この言葉の意味は結果を見てもらえば分かると思う）として展開すると

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} b_{n-k,k}(x-a)^{n-k}(y-b)^k \\ &= b_{00} \\ &+ b_{10}(x-a) + b_{01}(y-b) \\ &+ b_{20}(x-a)^2 + b_{11}(x-a)(y-b) + b_{02}(y-b)^2 \\ &+ \\ &. \\ &. \\ &. \\ &+ b_{N0}(x-a)^N + \cdots + b_{N-k,k}(x-a)^{N-k}(y-b)^k + \cdots + b_{0N}(y-b)^N. \end{aligned} \tag{46}$$

となる。両辺に $x = a, y = b$ を代入すれば

$$\boxed{f(a, b) = b_{00}}$$

となる。一方 (46) の両辺を x について偏微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k,k}(n-k)(x-a)^{n-k-1}(y-b)^k \qquad (47)\\
&= b_{10}\\
&+ b_{20}\cdot 2(x-a) + b_{11}(y-b)\\
&+ b_{30}\cdot 3(x-a)^2 + b_{21}\cdot 2(x-a)(y-b) + b_{12}(y-b)^2\\
&+\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&+ b_{N0}N(x-a)^{N-1} + \cdots + b_{N-k,k}(N-k)(x-a)^{N-k-1}(y-b)^k + \cdots + b_{1,N-1}(y-b)^{N-1},
\end{aligned}
$$

となるので、これに $x=a, y=b$ を代入すると

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b_{10}}$$

となる。一方、(46) の両辺を y について偏微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} b_{n-k,k}(x-a)^{n-k}k(y-b)^{k-1} \qquad (48)\\
&= b_{01}\\
&+ b_{11}(x-a) + b_{02}\cdot 2(y-b)\\
&+ b_{21}(x-a)^2 + b_{12}(x-a)\cdot 2(y-b) + b_{03}\cdot 3(y-b)^2\\
&+\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&+ b_{N-1,1}(x-a)^{N-1} + \cdots + b_{N-k,k}(x-a)^{N-k}k(y-b)^{k-1} + \cdots + b_{0N}N(y-b)^{N-1},
\end{aligned}
$$

となるので、これに $x=a, y=b$ を代入すると

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = b_{01}}$$

となる。

更に (47) をもう 1 回 x について偏微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \sum_{n=2}^{N}\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-k,k}(n-k)(n-k-1)(x-a)^{n-k-2}(y-b)^k \\
&= b_{20}\cdot 2\cdot 1 \\
&+ b_{30}\cdot 3\cdot 2(x-a) + b_{21}\cdot 2\cdot 1(y-b) \\
&+ b_{40}\cdot 4\cdot 3(x-a)^2 + b_{31}\cdot 3\cdot 2(x-a)(y-b) + b_{22}\cdot 2\cdot 1(y-b)^2 \\
&+ \\
&. \\
&. \\
&. \\
&+ b_{N0}N(N-1)(x-a)^{N-2} + \cdots + b_{N-k,k}(N-k)(N-k-1)(x-a)^{N-k-2}(y-b)^k \\
&+ \cdots + b_{2,N-2}\cdot 2\cdot 1(y-b)^{N-2}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

となるので、これに $x=a, y=b$ を代入すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 2\cdot 1\cdot b_{20}$$

となる。

一方、(47) を今度は y について偏微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \sum_{n=2}^{N}\sum_{k=1}^{N-1} b_{n-k,k}(n-k)(n-k-1)(x-a)^{n-k-2}(y-b)^k \\
&= b_{11} \\
&+ b_{21}\cdot 2(x-a) + b_{12}\cdot 2(y-b) \\
&+ b_{31}\cdot 3(x-a)^2 + b_{22}\cdot 2(x-a)\cdot 2(y-b) + b_{13}(y-b)^2 \\
&+ \\
&. \\
&. \\
&. \\
&+ b_{N-1,1}N(x-a)^{N-1} + \cdots + b_{N-k,k}(N-k)(x-a)^{N-k-1}k(y-b)^{k-1} \\
&+ \cdots + b_{1,N-1}(y-b)^{N-1}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

となるので、これに $x=a, y=b$ を代入すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = 1\cdot 1\cdot b_{11}.$$

となる。(実は (48) の両辺を x で偏微分しても (50) と同じ式が得られる。)

同様なことを繰り返すことにより

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(a,b) = k!\cdot l!\cdot b_{kl}.$$

逆に言えば

$$\boxed{b_{kl} = \frac{1}{k!\cdot l!}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k \partial y^l}(a,b),}$$

という、テイラー展開の係数を f を用いて表す公式になる。これを (46) に代入すると

$$\begin{aligned}
f(x,y) = &f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\\
&+ \cdots\\
&+ \frac{1}{N!}\frac{\partial^N f}{\partial x^N}(a,b)(x-a)^N + \cdots + \frac{1}{(N-k)!k!}\frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{N-k}(y-b)^k\\
&+ \cdots + \frac{1}{N!}\frac{\partial^N f}{\partial y^N}(a,b)(y-b)^N
\end{aligned}$$

という 2 変数多項式に関するテイラー展開の公式が得られる。

11.3 一般の 2 変数函数のテイラー展開

$f(x,y)$ が多項式でないときも 1 変数のときと同様、以下の 2 つの型の定理が成り立つ：

定理 **7.** 与えられた函数 $f(x,y)$ と点 (a,b) に対して

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k,k}(x-a)^{n-k}(y-b)^k$$

と表されて $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}|b_{n-k,k}|r^n$ が収束するような正の数 r が存在するならば

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k\\
&= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\\
&+ \cdots\\
&+ \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)(x-a)^n + \cdots + \frac{1}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k\\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)(y-b)^n + \cdots
\end{aligned}$$

(定理 7 終)

注 **35.** $f(x,y)$ が上の定理の仮定を満たすとき、「$f(x,y)$ は点 (a,b) で実解析的である」という。

上の定理の右辺を「$f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ におけるテイラー展開」(テイラー級数)という。

定理 8. $f(x,y)$ を $(x,y)=(a,b)$ を含むある範囲で定義された C^n-級函数(即ち n 階以下のすべての偏導函数が存在して連続)とすれば

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(m-k)!k!}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{m-k}(y-b)^k + R(x,y) \\
&= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)(x-a)^n + \cdots + \frac{1}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)(y-b)^n + R(x,y)
\end{aligned}
$$

かつ $|R(x,y)|$ は $\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^n$ と較べて無視できるほど小さい、即ち $\displaystyle\lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}\frac{R(x,y)}{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|^n}=0$ (定理 8 終)

注 **36.** 証明については、例えば杉浦 p.147 の定理 7.2 あるいは小林「続」pp.44-46 の剰余項の表示を用いれば出来る。

上の定理の右辺あるいは右辺から $R(x,y)$ を除いた部分を「$f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における n 次までのテイラー展開」という。

例題 5. $f(x,y)=x^5+x^2y^3$ のとき、$f(x,y)$ の $(x,y)=(1,1)$ における 3 次までのテイラー展開を求め $x^5+x^2y^3=\cdots$ の形で書け。

<u>解答例</u>

$$
\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5x^4+2xy^3 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 20x^3+2y^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 6xy^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6x^2y
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= 60x^2 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} &= 6y^2 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} &= 12xy \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= 6x^2
\end{cases}
$$

$$
f(1,1)=2
\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= 7 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) &= 3
\end{cases}
\begin{cases}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) &= 22 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) &= 6 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) &= 6
\end{cases}
\begin{cases}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) &= 60 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,1) &= 6 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1) &= 12 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1) &= 6
\end{cases}
$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^5+x^2y^3=2+7(x-1)+3(y-1)+11(x-1)^2+6(x-1)(y-1)+3(y-1)^2 \\ +10(x-1)^3+3(x-1)^2(y-1)+6(x-1)(y-1)^2+(y-1)^3+\text{剰余項} \end{array}}$$

注 **37.** 初めの３項の係数 $(2,7,3)$ あたりだけを見て、「ああ、上で求めた数をそのままつければいいんだ」と早合点しないように。２次以上の項はそう は行かない。

問 **23.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y+1}$ のとき、$f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における３次までのテイラー展開を求め $\dfrac{1}{x+y+1}=\cdots$ の形で書け。

11.4　第 11 節のまとめ

- n 階までの偏導関数がすべて連続な関数を n 階連続微分可能関数または C^n 級関数という。C^n 級関数については n 階までの偏微分は偏微分する順番を交換しても結果は同じなので $\dfrac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}$ の形で書く。
- $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で実解析的ならば

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k$$

  ($(x,y)=(a,b)$ におけるテイラー展開)
- $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ を含む範囲で n 階連続微分可能ならば

$$f(x,y)\fallingdotseq\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(m-k)!k!}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{m-k}(y-b)^k$$

  ($(x,y)=(a,b)$ における n 次までのテイラー展開)

12　２変数テイラー展開の応用—２変数函数の極大極小

12.1　極大極小と２次近似

1 変数函数の場合、例えば極大とは増加から減少への変わり目と理解している人もいるだろう。しかし２変数函数の場合、例えば x 方向に極大で y 方向に極小で結局その点では極大でも極小でもないということも起こりうる。あるいは x 方向にも y 方向にも極大でも $y = x$ の方向には極小、というような場合もある。そこで以下のように定義する。

定義 12 (極大・極小)**.** 函数 $f(x, y)$ が点 (α, β) で極大であるとは、(α, β) を中心とする円の半径があるサイズよりも小さければ、その円内での $f(x, y)$ の最大値が $(x, y) = (\alpha, \beta)$ のときでありその時に限ることを言う。極小も同様に定義する。（定義 12 終)

注 **38.** もう少し式を使って書けば、函数 $f(x, y)$ が点 (α, β) で極大であるとは、(α, β) を中心とする円の半径があるサイズよりも小さければ、その円内では

$$f(x, y) \leq f(\alpha, \beta)$$

が成り立ち、かつ等号は $(x, y) = (\alpha, \beta)$ のときのみ成り立つということである。

注 **39.** 上の定義は同率一位も許さない狭義の「極大」である。例えば $f(x, y) = -y^2$ の場合、原点 $(0, 0)$ は $f(x, y)$ の広義の「極大」であるが、狭義の「極大」ではない。($f(x, 0) = 0$ だから直線 $y = 0$ 上の点はすべて同率一位だから。)

注 **40.** 「最大値」は英語（元のラテン語と区別つかないが）で maximum と言い、「極大値」は local maximum である。というわけで「局大値」と訳した方が良かったという意見もある。ローカルな最大値、お山の大将、井の中の蛙、自分のごく近くだけで比較すれば一番大きい（偉い）というわけである。

極大・極小は小さい円の内部では最大・最小であるので命題 7 から次がわかる：

命題 8 (極大極小の必要条件)**.** $f(x, y)$ を xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 V で定義された偏微分可能な函数とするとき、

$$f(x, y) \text{ が } (\alpha, \beta) \text{ で極大または極小} \Rightarrow (\alpha, \beta) \text{ は臨界点、すなわち} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

(命題 8 終)

$f(x, y)$ を極大または極小にする点のことを $f(x, y)$ の極値点と呼ぶことにすれば

$$\boxed{\text{極値点} \Rightarrow \text{臨界点}}$$

ということになる。従って x, y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解いて臨界点をすべて求めれば極値点はその中にすべて含まれていることになる。しかし、1 変数函数の時もそうだったように、臨界点だからといって極値点とは限らないので（つまり微分が 0 だからと

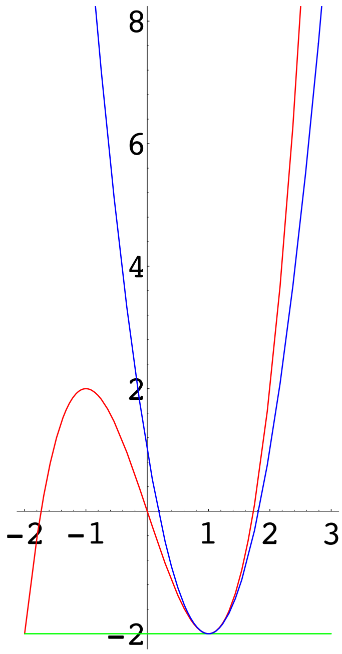
いって極大または極小になるとは限らないので)、個々の臨界点に対して極値点かどうかを判定する必要がある。1変数函数のときの判定方法は

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(a)=0, f''(a)>0 \Rightarrow x=a \text{ で } f(x) \text{ は極小} \\ f'(a)=0, f''(a)<0 \Rightarrow x=a \text{ で } f(x) \text{ は極大} \end{array}}$$

なのであった。($f'(a)=f''(a)=0$ のときはこの方法では判定できない。)この判定方法のひとつの解釈は、$f'(a)=0$ のとき $x=a$ の近くで

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

であるから右辺の2次函数が $x=a$ で極小の時は $f(x)$ も $x=a$ で極小、右辺の2次函数が $x=a$ で極大の時は $f(x)$ も $x=a$ で極大、ということであった。(4.3 節参照。)



2変数函数の時も同様に、与えられた $f(x,y)$ の臨界点 (a,b) に対して、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ であるから、その2次近似は

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \tag{51}$$

であるので右辺の2次函数が極大の時は元の $f(x,y)$ も極大、右辺の2次函数が極小の時は元の $f(x,y)$ も極小ということが証明できる(ただしどちらも狭義の極大極小とする)ので、同じような判定条件(十分条件)が考えられる。それを記述するには、まず2変数2次函数がどんなときに極大・極小になりどんなときにならないかを知る必要がある。

問 24. $f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における2次近似(テイラー展開)の公式を書き、$f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ にそれを適用してみよ。

12.2　２変数２次函数の分類

12.2.1　図形の平行移動

一般の２変数函数 $f(x,y)$ の臨界点 (a,b) における２次近似 (51) の函数のグラフ

$$z = f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2$$

は、$f(a,b) = d, \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = B, \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = C$ とおけば

$$z = d + A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$$

となる。これは曲面

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

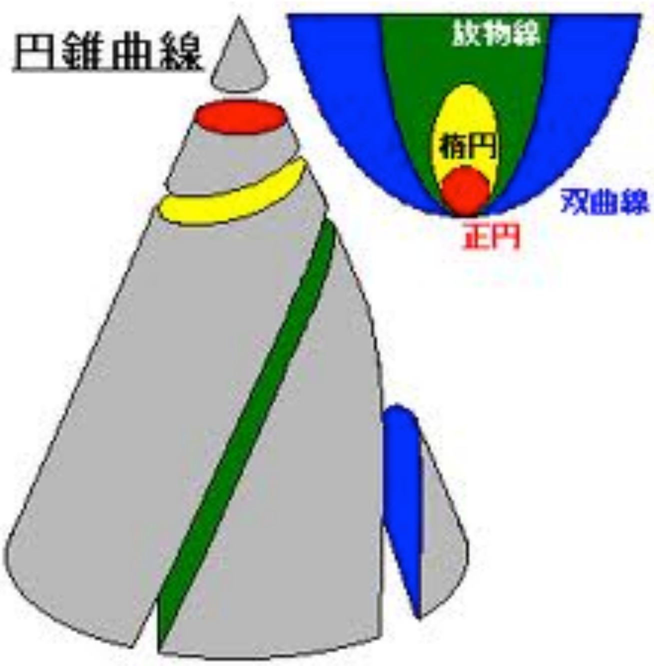
を x 方向に a、y 方向に b、z 方向に d、平行移動したものである。この曲面の等高線は xy 平面上の曲線

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = k$$

であり、２次曲線あるいは円錐曲線と呼ばれる曲線の一種である。

問 25. 上記を参考に、問 24 で求めた $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の $(x,y) = (0,1)$ における２次近似に対して、そのグラフをどのように平行移動すれば $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ の形になるか答えよ。また得られる $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ の形の式を書け。(A, B, C に具体的な値を代入した形で答える。)

12.2.2　円錐曲線



12.2.3　楕円の幾何学的定義

２定点からの距離の和が一定であるような点の軌跡を楕円という。より詳しく言えば、ある２定点 F, F' とある正の数 d に対して、$FP + F'P = d$ を満たす点 P の全体を楕円と呼ぶ。また、このとき、点 F, F' をこの楕円の焦点と呼ぶ。

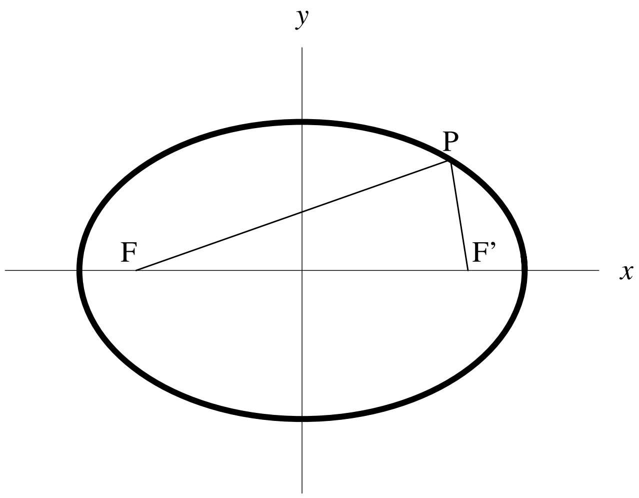


図１　楕円の幾何学的定義

12.2.4　楕円の方程式

焦点の座標を $(-\alpha, 0), (\alpha, 0)$（ただし $\alpha > 0$）とすると、点 (x, y) とそれぞれの焦点との距離は $\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}$, $\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$ であるからこれらの距離の和がある一定の値 d を取るための条件は

$$\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = d$$

である。これを変形して根号（ルート）のない式にすると、$0 < 2\alpha < d$ の条件の下

$$\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = d \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{d}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{d^2 - 4\alpha^2}}{2}}\right)^2 = 1$$

となる。(途中のやや長い計算を自分でやってみるとよい。分からなければ http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~norip/conic.pdf 参照。)

$\dfrac{d}{2} = a$, $\dfrac{\sqrt{d^2 - 4\alpha^2}}{2} = b$ とおけば

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{52}$$

である。(52) を楕円の方程式の標準形と呼ぶ。逆に言うと

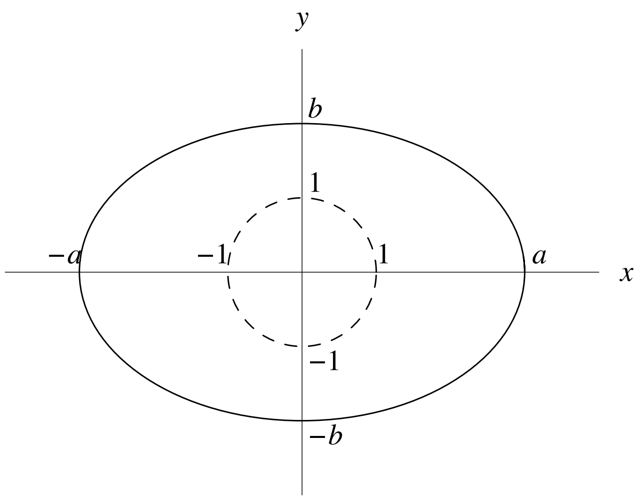


図 2　円の 1 次変換

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \text{ は } \begin{cases} a>b \text{ のとき } (\pm\sqrt{a^2-b^2},0) \text{ を焦点とし } a \text{ を半長軸とする楕円} \\ a<b \text{ のとき } (0,\pm\sqrt{b^2-a^2}) \text{ を焦点とし } b \text{ を半長軸とする楕円} \end{cases}$$

である。焦点の座標を a,b で表す式は印象的だが、暗記する必要はない。

12.2.5　円の 1 次変換としての楕円

楕円の方程式の標準形 (52) に

$$\begin{cases} x=aX \\ y=bY \end{cases} \tag{53}$$

を代入すると単位円の方程式

$$X^2+Y^2=1 \tag{54}$$

になるから、楕円 (52) は、単位円 (54) を x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍したものである。点 (x,y) が楕円の上にあるための条件は X 方向に $\frac{1}{a}$ 倍、y 方向に $\frac{1}{b}$ 倍して戻してやった $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ が、元の円の方程式を満たすこと、即ち $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ である、と考えておくと、変換の式 (53) を書かずに理解することが出来る。

なお、$(-a,0)$ と $(a,0)$ を両端とする線分をこの楕円の長軸と言い、$(0,-b)$ と $(0,b)$ を両端とする線分を短軸と言う。

例題 6. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ で表される図形の概形を xy 平面上に描け。

解答例

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$ だから

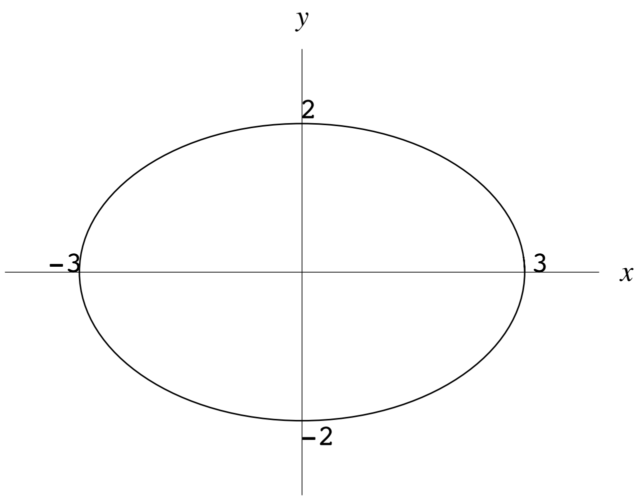


図 3　$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

12.2.6　双曲線の幾何学的定義

２定点からの距離の差が一定であるような点の軌跡を双曲線という。より詳しく言えば、ある２定点 F, F' とある正の数 d に対して、$|FP - F'P| = d$ を満たす点 P の全体を双曲線という。また、このとき、点 F, F' をこの双曲線の焦点と呼ぶ。

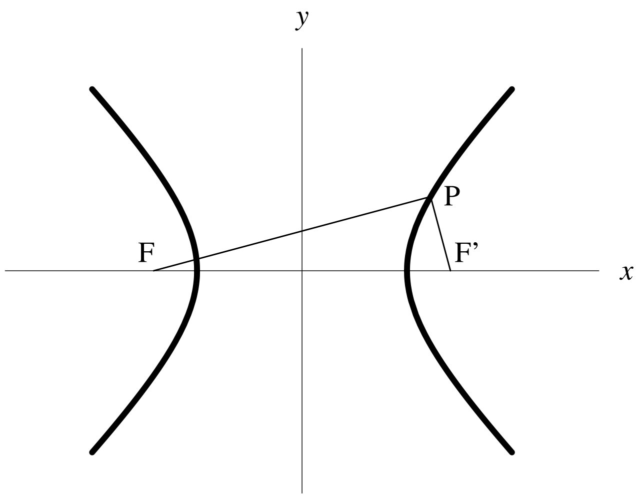


図 4　双曲線の幾何学的定義

12.2.7　双曲線の方程式

焦点の座標を $(-\alpha, 0), (\alpha, 0)$（ただし $\alpha > 0$）とすると、点 (x, y) とそれぞれの焦点との距離は $\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}$, $\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}$ であるからこれらの距離の差がある一定の値 d を取るための条件は

$$\left|\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}-\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}\right| = d$$

である。これを変形して根号（ルート）のない式にしてみよう。$0 < d < 2\alpha$ の条件の下

$$\left|\sqrt{(x+\alpha)^2+y^2}-\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}\right| = d \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{d}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{4\alpha^2-d^2}}{2}}\right)^2 = 1$$

（途中のやや長い計算を自分でやってみるとよい。分からなければ http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~norip/conic.pdf 参照。）

$\dfrac{d}{2} = a$, $\dfrac{\sqrt{4\alpha^2-d^2}}{2} = b$ とおけば

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{55}$$

である。これを双曲線の方程式の標準形という。逆に言うと

$$\boxed{\left(\tfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ は } (\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0) \text{ を焦点とする双曲線}}$$

である。焦点の座標を a, b で表す式は印象的だが、暗記する必要はない。

12.2.8　直角双曲線

楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ が単位円 $x^2+y^2=1$ を原点中心に x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍した図形であるのと同様、双曲線 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ は、双曲線 $x^2-y^2=1$ を原点中心に x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍した図形である。双曲線 $x^2-y^2=1$ あるいはこれと相似な

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1}$$

あるいは

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

で表される双曲線を直角双曲線という。一般に双曲線には漸近線が２本あり、$a = b$ であることが２本の漸近線が直交するための必要十分条件であることから、このように呼ばれるのであるが、このことを以下で明らかにしよう。

12.2.9　回転移動した図形の方程式

原点を中心にした正の向き θ の回転移動が線型写像であることは、線型写像の定義を回転移動の場合に当てはめてみればわかる。従って行列を掛けることによって記述できる。この行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の行き先はこれを原点中心に θ 回転させた $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ であり、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ の行き先はこれを原点中心に θ 回転させた $\begin{pmatrix} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ であるので

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

即ち

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。一般に点 (x, y) を原点中心に θ 回転移動した点 (x', y') は

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

となる訳である。さて、一般に方程式 $F(x, y) = 0$ で表される図形（曲線）を原点中心に θ 回転させた図形の方程式は、点 (x, y) を逆に原点中心に $-\theta$ 回転させて戻した点 $(x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta), x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta)) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ が、元の図形の上にあるための条件を書けばよいので、

曲線 $F(x, y) = 0$ を原点中心に θ 回転させた曲線の方程式は $F(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) = 0$

となる。

12.2.10　反比例のグラフと直角双曲線

反比例のグラフ $y = \frac{c}{x}$（ただし $c > 0$）言い換えると $xy = c$ を、原点中心に θ 回転させた曲線の方程式は

$$\begin{aligned} &(x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) = c \\ \Leftrightarrow\ &-(\cos\theta\sin\theta)x^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)xy + (\cos\theta\sin\theta)y^2 = c \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{\sin 2\theta}{2}x^2 + (\cos 2\theta)xy + \frac{\sin 2\theta}{2}y^2 = c \end{aligned} \tag{56}$$

である。特に $\cos 2\theta = 0$ になるような角度、例えば $\theta = -\frac{\pi}{4}$ を取れば、$\sin 2\theta = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ で (56) は

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c \text{ あるいは } \left(\frac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$$

であって、上の 12.2.8 で言うところの直角双曲線の標準形の方程式である。言い換えると、反比例のグラフ $y = \frac{c}{x}$ は、直角双曲線 $\left(\frac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転移動させたものになっている。

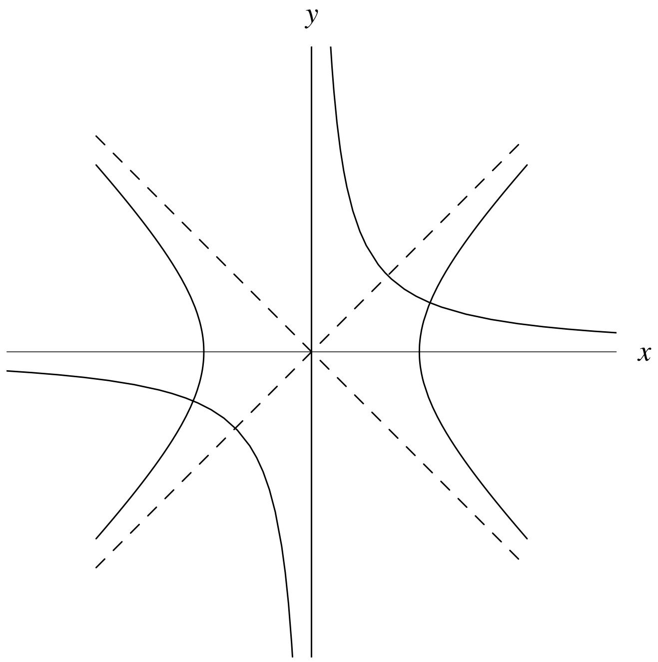


図 5　反比例のグラフ双曲線 $y = \frac{c}{x}$ と直角双曲線 $\left(\frac{x}{\sqrt{2c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2c}}\right)^2 = 1$

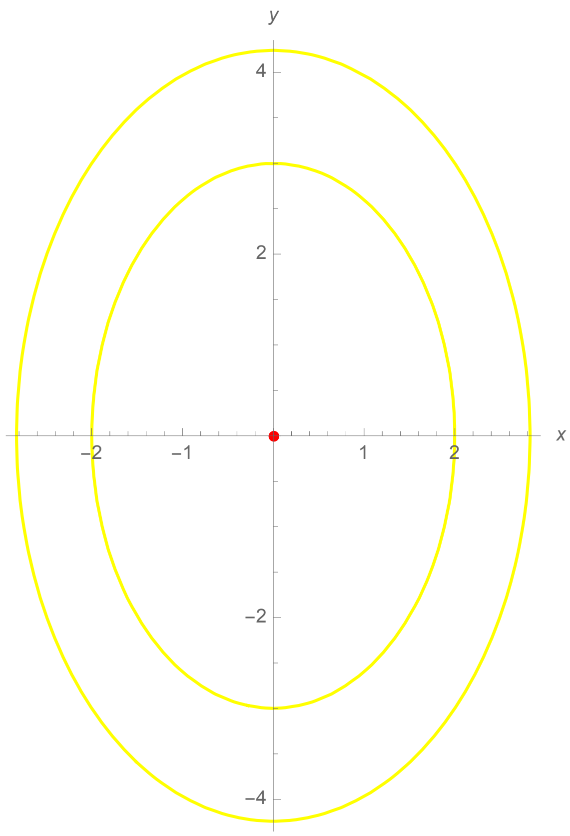
12.3　２変数同次２次函数の等高線

$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ の等高線は、$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c \ (-\infty < c < \infty)$ なる曲線群である。

方程式 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c$ で定義される図形は $\begin{cases} \text{空集合} & (c < 0) \\ \text{原点} & (c = 0) \\ \text{楕円 } \left(\frac{x}{a\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{c}}\right)^2 = 1 & (c > 0) \end{cases}$ であるから

$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ の等高線は

問 26. どうなるか？下の余白に描け。（例えば $a = 2, b = 3$ のときに $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ の $z = 0, z = 1, z = 2$ による切り口を同じ xy 平面上に描け。）

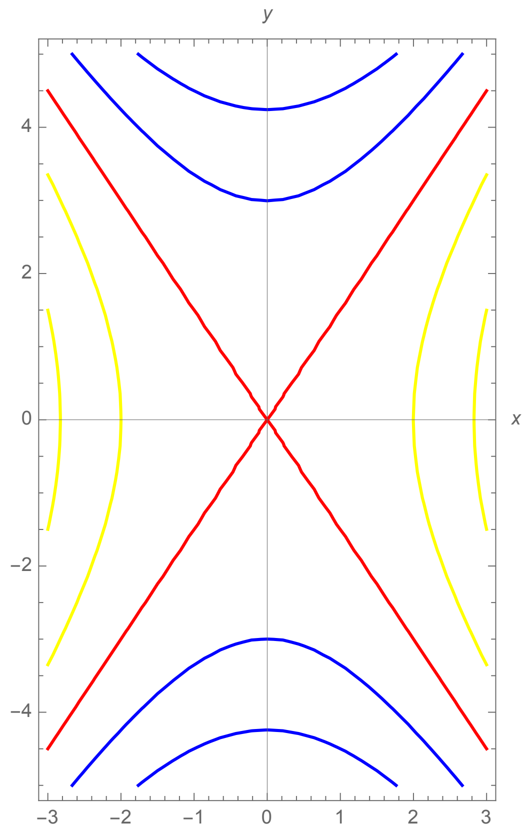


$z=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$ の等高線は、$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\ (-\infty<c<\infty)$ なる曲線群である。方程式 $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c$ で定義される図形は

$$\begin{cases} \text{双曲線}\left(\frac{y}{b\sqrt{-c}}\right)^2-\left(\frac{x}{a\sqrt{-c}}\right)^2=1 & (c<0) \\ 2\text{ 直線 } \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0 & (c=0) \\ \text{双曲線}\left(\frac{x}{a\sqrt{c}}\right)^2-\left(\frac{y}{b\sqrt{c}}\right)^2=1 & (c>0) \end{cases}$$

であるから $z=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$ の等高線は

問 **27.** どうなるか？下の余白に描け。(例えば $a=2,b=3$ のときに $z=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$ の $z=-2,z=-1,z=0,z=1,z=2$ による切り口を同じ xy 平面上に描け。)



12.4　２変数同次２次函数の行列表示

$$ax^2+bxy+cy^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{57}$$

と表すことが出来る。この行列 $\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}$ のことを２変数同次２次函数 $ax^2+bxy+cy^2$ の表現行列と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

およびこれを転置した式（実質的には同じ式）

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を代入すると

$$ax^2+bxy+cy^2=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} \tag{58}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{59}$$

と置くと

$$ax^2+bxy+cy^2=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=AX^2+BXY+CY^2$$

つまり、２変数同次２次函数のグラフ $z=ax^2+bxy+cy^2$ を z 軸を中心に θ 回転させて得られる図形はこれも $z=Ax^2+Bxy+Cy^2$ という２変数同次２次函数のグラフになる。

(59) から特に

$$\frac{B}{2}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=b\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2}+(a-c)\sin\theta\cos\theta$$

すなわち

$$B=b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(a-c)\cdot 2\sin\theta\cos\theta=b\cos 2\theta+(a-c)\sin 2\theta=\begin{pmatrix}b\\ a-c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$$

であるから、与えられたどんな a,b,c の値に対しても $\begin{pmatrix}b\\ a-c\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$ が直交するように角度 θ を調節すれば $B=0$ にできる。どんな２変数同次２次函数のグラフ $z=ax^2+bxy+cy^2$ も z 軸について回転すれば $z=Ax^2+Cy^2$ にできる訳である。

問 28. $x^2+xy+y^2=1$ を原点中心に適当に回転させることによりその方程式を $Ax^2+Cy^2=1$ の形にせよ。これを用いて $x^2+xy+y^2=1$ を xy 平面上に図示せよ。

12.5　一般の２変数同次２次函数の等高線

このとき、

(i) $\underline{A, C>0\text{ のとき}}$　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{A}}, \beta=\frac{1}{\sqrt{C}}$ とおけば $z=\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2$ となるので、等高線は

(ii) $\underline{A, C<0\text{ のとき}}$　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{-A}}, \beta=\frac{1}{\sqrt{-C}}$ とおけば $z=-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2$ となるので、等高線は

(iii) $\underline{A<0<C\text{ のとき}}$　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{-A}}, \beta=\frac{1}{\sqrt{C}}$ とおけば $z=-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2$ となるので、等高線は

(iv) $\underline{C<0<A\text{ のとき}}$　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{A}}, \beta=\frac{1}{\sqrt{-C}}$ とおけば $z=\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2$ となるので、等高線は

A, C が同符号のときは原点で極大または極小、異符号のときは原点で峠になっているので、まとめると

- $\underline{AC > 0 \text{ のとき}}$ $z = Ax^2 + Cy^2$ は原点で極大または極小。
- $\underline{AC < 0 \text{ のとき}}$ $z = Ax^2 + Cy^2$ は原点で峠。極大でも極小でもない。

一般に $z = ax^2 + bxy + cy^2$ を z 軸を中心に θ 回転したものを $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ とすれば

$$\begin{aligned} AC - \frac{B^2}{4} &= \det \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \\ &= ac - \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

であるので、表現行列は $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$ に変化しても行列式の値は変わらない。特に $B = 0$ のときは $AC = ac - \frac{b^2}{4}$ になるので

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{ac - \frac{b^2}{4} > 0 \text{ のとき}}\ z = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ は原点で極大または極小。} \\ \underline{ac - \frac{b^2}{4} < 0 \text{ のとき}}\ z = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ は原点で峠。極大でも極小でもない。} \end{array}} \tag{60}$$

問 29. 次の２変数同次２次函数について、原点で極大か極小かどちらでもないかを答えよ。

①$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$　②$f(x, y) = x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2$　③$f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

12.6 ヘッシアン

定義 13 (ヘッシアン)**.** 函数 $f(x, y)$ に対し

$$H_f(x, y) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2$$

と定義し H_f を f のヘッシアンあるいはヘッセ行列式と呼ぶ。

注 **41.** H_f は、例えば $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ のように説明しなくてもほぼ誰にでも通じる記号と違って、ここだけの記号であるから、くれぐれも答案などで説明抜きにいきなり H_f などと書かないように。因みに判別式を D と書くのも同様で、説明抜きにいきなり D と書いても他人には通じない。

さて２変数函数 $f(x, y)$ の臨界点 (a, b) における２次近似 (51) の函数のグラフ

$$z = f(a, b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \tag{61}$$

の形状はこれを平行移動した

$$z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)y^2$$

の形状と同じだから、(60) を適用すると

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2>0\text{ のとき}}\text{ (61) は原点で極大または極小。}\\ \underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2<0\text{ のとき}}\text{ (61) は原点で峠。}\end{array}}$$

となる。臨界点において 2 次近似が極大または極小なら元の函数もそうであり

定理 9. $f(x,y)$ は xy 平面上の領域 D で 2 階連続微分可能（即ち 0 階から 2 階までのすべての偏導函数が存在して連続）とする。D の内部の点 (a,b) に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,\ H_f(a,b)>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0\Rightarrow f(x,y)\text{ は点 }(a,b)\text{ で極小}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,\ H_f(a,b)>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0\Rightarrow f(x,y)\text{ は点 }(a,b)\text{ で極大}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,\ H_f(a,b)<0\Rightarrow f(x,y)\text{ は点 }(a,b)\text{ で極大でも極小でもない}$$

が成り立つ。（定理 9 終）

注 **42.** 杉浦 p.159 の定理 8.4 系がこの定理に対応するが、n 変数版で書いてある。小林「続」p.59 の定理 1 にもある。こちらは 2 変数版。

注 **43.** それでは臨界点でヘッシアンが 0 のとき、即ち

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,\ H_f(a,b)=0$$

のときはどうなるのか、気になるはずである。実はこの場合、$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大または極小になることもあるし、どちらにもならないこともある。上の判定条件に当てはまらないからといって「極大極小にならない」と判断するのは誤りである。臨界点でヘッシアンが 0 になる場合は、極大または極小になるのかどちらにもならないのかをその都度自分で工夫して判定しなければならない。

例 **13.**

例題 **7.** $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ を極大にする点 (x,y) および極小にする点 (x,y) をそれぞれすべて求めよ。

以下、解法を説明するが、答案の書き方の説明ではない。このまままねして書いても答案にはならないので注意すること。(教科書にある例題に対する解答も、読者に対する説明として、しかも紙数の制約からごく簡潔に書いてあるので、そのまままねしても答案にはならないので注意すること。)

(1) 極値点はすべて臨界点なので、まず臨界点をすべて求める。臨界点とは

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial f}{\partial x}=2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \\ 0=\frac{\partial f}{\partial y}=2y(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

を満たす点 (x,y) のことである。$\frac{1}{2}e^{x^2+y^2}$ を両辺にかけると

$$\begin{cases} 0=x(1-x^2+y^2) \\ 0=y(-1-x^2+y^2) \end{cases}$$

となり

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ または } 1-x^2+y^2=0) \text{ かつ } (y=0 \text{ または } -1-x^2+y^2=0) \\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (x=0 \text{ かつ } -1-x^2+y^2=0) \\
&\text{または } (1-x^2+y^2=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (1-x^2+y^2=0 \text{ かつ } -1-x^2+y^2=0) \\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (x=0 \text{ かつ } -1+y^2=0) \\
&\text{または } (1-x^2=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (1-x^2+y^2=0 \text{ かつ } 2=0) \\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (x=0 \text{ かつ } y=\pm 1) \text{ または } (x=\pm 1 \text{ かつ } y=0)
\end{aligned}$$

なので、臨界点は $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1,0)$ である。

(2) 各臨界点に対しヘッシアンによる判定法を適用する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}-4x^2e^{-x^2-y^2}-4x^2(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4xy(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}+4y^2e^{-x^2-y^2}-4y^2(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

本来は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ などと書くべきところをサボって単に $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ などと書いていることに注意。

$$H_f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

とおくと

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-2$ から

$$H_f(0,0)=2\cdot(-2)-0^2=-4<0$$

なので $(0,0)$ は峠点であって極大でも極小でもない。

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) = 4e^{-1}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pm 1) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pm 1) = 4e^{-1}$ から

$$H_f(0,\pm 1) = (4e^{-1})^2 - 0^2 = 16e^{-2} > 0$$

なので $(0,\pm 1)$ は極値点である。更に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) = 4e^{-1} > 0$ であることから $(0,\pm 1)$ において $f(x,y)$ は極小値を取る。

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,0) = -4e^{-1}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm 1,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1,0) = -4e^{-1}$ から

$$H_f(\pm 1,0) = (-4e^{-1})^2 - 0^2 = 16e^{-2} > 0$$

なので $(\pm 1,0)$ は極値点である。更に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,0) = -4e^{-1} < 0$ であることから $(\pm 1,0)$ において $f(x,y)$ は極大値を取る。

従って $\boxed{f(x,y) \text{ を極大にする点は } (\pm 1,0)\text{、極小にする点は } (0,\pm 1)}$ である。

問 30. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 3$ を極大にする点、極小にする点をそれぞれすべて求めよ。(極大・極小になるかそうでないかの判定にはヘッシアンを用いること。)

12.7 第 12 節のまとめ

- $\boxed{\text{極値点} \Rightarrow \text{臨界点}}$ なので、まず臨界点をすべて求め、それぞれの臨界点について極大か極小かどちらでもないかをチェックすればよい。
- $f(x,y)$ の臨界点 (a,b) における 2 次近似のグラフは

$$z = f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2$$

となる。これを平行移動した

$$z = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)y^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の等高線の形はヘッシアン：

$$H_f(x,y) := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

が正のとき楕円、負のとき双曲線である。
- (a,b) が臨界点のとき、その点でヘッシアンが 0 でなければ、極値点かどうかはヘッシアンの符号で判定できる：

$$\begin{aligned} &H_f(a,b) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極小} \\ &H_f(a,b) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極大} \\ &H_f(a,b) < 0 \Rightarrow f(x,y) \text{ は点 } (a,b) \text{ で極大でも極小でもない} \end{aligned}$$

13　合成写像の微分

13.1　写像の微分

13.1.1　線型写像と非線型写像

写像と言ってもここでは一般の集合から集合への写像ではなく、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像を念頭に置いている。以下、例として $m = n = 2$ の場合を考える。

問 **31.** st 平面上に 8 本の直線 $s = -1, s = 0, s = 1, s = 2, t = -1, t = 0, t = 1, t = 2$ を図示せよ。xy 平面上にこれらの直線を線型写像 $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で写したものを図示せよ。

問 **32.** st 平面上に 7 本の直線 $s = -1, s = 0, s = 1, s = 2, t = -\frac{\pi}{3}, t = 0, t = \frac{\pi}{3}$ を図示せよ。xy 平面上にこれらの直線を非線型写像 $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で写したものを図示せよ。

13.1.2　非線型写像とその線型近似の例

非線型写像 $f:\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を点 $(s,t)=(1,0)$ の近くで 1 次近似することを考える。

s を $s=1$ において、また $\cos t, \sin t$ を $t=0$ において、それぞれ 1 次までテイラー展開すると

$$\begin{aligned} s &= 1+(s-1) \\ \cos t &= 1+0\cdot t+\varepsilon_1(t) \qquad \left(\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_1(t)}{t}=0\right) && (62) \\ \sin t &= 0+1\cdot t+\varepsilon_2(t) \qquad \left(\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_2(t)}{t}=0\right) && (63) \end{aligned}$$

となるので、かけると

$$\begin{aligned} s\cos t &= \{1+(s-1)\}\{1+\varepsilon_1(t)\} \\ &= 1+(s-1)+\varepsilon_1(t)+(s-1)\varepsilon_1(t) \\ s\sin t &= \{1+(s-1)\}\{t+\varepsilon_2(t)\} \\ &= t+(s-1)t+\varepsilon_2(t)+(s-1)\varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(s,t) &= \varepsilon_1(t)+(s-1)\varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_4(s,t) &= (s-1)t+\varepsilon_2(t)+(s-1)\varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{cases} s\cos t = 1+(s-1)+\varepsilon_3(t) \\ s\sin t = t+\varepsilon_4(t) \end{cases} \tag{64}$$

となり、かつ

$$\begin{aligned} \lim_{(s,t)\to(1,0)} \frac{\varepsilon_3(t)}{\sqrt{(s-1)^2+t^2}} &= 0 \\ \lim_{(s,t)\to(1,0)} \frac{\varepsilon_4(t)}{\sqrt{(s-1)^2+t^2}} &= 0 \end{aligned}$$

が示せるので $s\cos t, s\sin t$ の $(s,t)=(1,0)$ の近くでの 1 次近似 (64) が得られる。

注 **44.** (62) は、$g(t)=\cos t$ とおくと $g'(t)=-\sin t$ から $g(0)=\cos 0=1, g'(0)=-\sin 0=0$ であることと $g(t)=g(0)+g'(0)t+\varepsilon(t)$ とおくと $\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(t)}{t}=0$ であることと p.8 の命題 1 とを用いると出る。（注 44 終）

あるいは

$$\begin{aligned} f_1(s,t) &= s\cos t \\ f_2(s,t) &= s\sin t \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix}$$

であるので、２変数函数の１次近似あるいは１次までのテイラー展開の公式を用いて

$$\begin{aligned} s\cos t &= f_1(s,t) = f_1(1,0) + \frac{\partial f_1}{\partial s}(1,0)(s-1) + \frac{\partial f_1}{\partial t}(1,0)t + \text{剰余項} \\ &= 1 + 1\cdot(s-1) + 0\cdot t + \text{剰余項} \\ s\sin t &= f_2(s,t) = f_2(1,0) + \frac{\partial f_2}{\partial s}(1,0)(s-1) + \frac{\partial f_2}{\partial t}(1,0)t + \text{剰余項} \\ &= 0 + 0\cdot(s-1) + 1\cdot t + \text{剰余項} \end{aligned}$$

としても同じ結果が得られる。行列と縦ベクトルを用いて書くと $(s,t)\to(1,0)$ のとき

$$\begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 \\ t \end{pmatrix} + \text{剰余項}$$

となる。

次に同じ非線型写像 f を点 $(s,t) = (1,\frac{\pi}{3})$ の近くで１次近似することを考える。

s を $s=1$ において、また $\cos t, \sin t$ を $t=\frac{\pi}{3}$ においてそれぞれ１次までテイラー展開すると

$$\begin{aligned} s &= 1 + (s-1) \\ \cos t &= \cos\frac{\pi}{3} - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_5(t) \qquad \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon_5(t)}{t-\frac{\pi}{3}} = 0\right) \\ \sin t &= \sin\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_6(t) \qquad \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon_6(t)}{t-\frac{\pi}{3}} = 0\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} s\cos t &= \{1+(s-1)\}\left\{\cos\frac{\pi}{3} - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_5(t)\right\} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(s-1) - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_7(t) \\ s\sin t &= \{1+(s-1)\}\left\{\sin\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_6(t)\right\} \\ &= \sin\frac{\pi}{3} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(s-1) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_8(t) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \varepsilon_7(t) &= \varepsilon_5(t) + (s-1)\varepsilon_5(t) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(s-1)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \\ \varepsilon_8(t) &= \varepsilon_6(t) + (s-1)\varepsilon_6(t) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(s-1)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

となり、かつ

$$\lim_{(s,t)\to(1,\frac{\pi}{3})} \frac{\varepsilon_7(t)}{\sqrt{(s-1)^2+(t-\frac{\pi}{3})^2}} = 0$$

$$\lim_{(s,t)\to(1,\frac{\pi}{3})} \frac{\varepsilon_8(t)}{\sqrt{(s-1)^2+(t-\frac{\pi}{3})^2}} = 0$$

が示せるので $s\cos t, s\sin t$ の $(s,t)=(1,\frac{\pi}{3})$ の近くでの 1 次近似

$$\begin{cases} s\cos t = \cos\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(s-1) - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \\ s\sin t = \sin\frac{\pi}{3} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(s-1) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \end{cases}$$

が得られる。

また 2 変数函数の 1 次近似あるいは 1 次までのテイラー展開の公式を用いて

$$\begin{aligned} s\cos t &= f_1(s,t) = f_1(1,\frac{\pi}{3}) + \frac{\partial f_1}{\partial s}(1,\frac{\pi}{3})(s-1) + \frac{\partial f_1}{\partial t}(1,\frac{\pi}{3})\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(s-1) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \\ s\sin t &= f_2(s,t) = f_2(1,\frac{\pi}{3}) + \frac{\partial f_2}{\partial s}(1,\frac{\pi}{3})(s-1) + \frac{\partial f_2}{\partial t}(1,\frac{\pi}{3})\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \\ &= \sin\frac{\pi}{3} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(s-1) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(t-\frac{\pi}{3}\right) + \text{剰余項} \end{aligned}$$

としても同じ結果が得られる。行列と縦ベクトルを用いて書くと

$$\begin{pmatrix} s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 \\ t-\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + \text{剰余項}$$

となる。

13.1.3　ヤコビ行列の定義

写像

$$f : \mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

が

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

で与えられるとき、点 $(a_1, \cdots, a_n)$ の近くでそれぞれ 1 次函数で近似すると

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n) & = f_1(a_1,\cdots,a_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1,\cdots,a_n)(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a_1,\cdots,a_n)(x_n-a_n) \\ & +(\text{剰余項})_1 \\ & . \\ & . \\ & . \\ & . \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) & = f_m(a_1,\cdots,a_n) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a_1,\cdots,a_n)(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a_1,\cdots,a_n)(x_n-a_n) \\ & +(\text{剰余項})_m \end{cases}$$

となることから、これをまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1,\cdots,a_n) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_m(a_1,\cdots,a_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1,\cdots,a_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a_1,\cdots,a_n) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a_1,\cdots,a_n) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a_1,\cdots,a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n-a_n \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} (\text{剰余項})_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ (\text{剰余項})_m \end{pmatrix}$$

となる。そこで

定義 14 (ヤコビ行列)**.**

$$J_f(x_1,\cdots,x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_1,\cdots,x_n) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

を写像 f のヤコビ行列という。

注 **45.** J_f という記号は、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$ のような伝統的で世界共通の記号と異なり、ここだけの記号であるので、諸君が用いるときは説明なしにいきなり用いてはならない。例えば杉浦「解析入門 I」ではヤコビ行列 $J_f(x_1,\cdots,x_n)$ を $f'(x_1,\cdots,x_n)$ と書き (p.127 定義 1)「ヤコビ行列式」$\det J_f(x_1,\cdots,x_n)$ を $J_f(x_1,\cdots,x_n)$ あるいは $\det f'(x_1,\cdots,x_n)$ と書いている。(p.122 定義 2。)

m 個の変数 $x_1, \cdots, x_m$ をまとめて $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と書けば

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

となり、いくらか見やすくなる。更に、いちいち変数 x を書くのも面倒なので、サボって

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

あるいは

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

とも書く。

ヤコビ行列は、与えられた写像の「微分」すなわち与えられた写像を近似する線型写像の表現行列である。一般の m とか n とかになった途端にわからなくなる人のために、上と同じことを m や n が小さい値のときに以下で説明しよう。まずはそれらがわかれば十分である。

13.1.4 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のヤコビ行列

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (\text{剰余項}),$$
$$\lim_{x \to a} \frac{(\text{剰余項})}{x-a} = 0$$

であるから、

$$J_f(a) = (f'(a)) \qquad (1 \times 1 - \text{行列})$$

である。つまり $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 f とは 1 変数函数のことであり、この場合、点 a における f のヤコビ行列とは微分係数 $f'(a)$ のことに他ならない。

13.1.5　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のヤコビ行列

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + (\text{剰余項}) \\ &= f(a,b) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + (\text{剰余項}) \end{aligned}$$

かつ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(\text{剰余項})}{\left| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right|} = 0$$

であるから、

$$J_f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \qquad (1 \times 2 - \text{行列})$$

である。

問 **33.** 写像 $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ の点 (a,b) におけるヤコビ行列 $J_f(a,b)$ を計算し、$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + J_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ の $f(x,y) = x^2 + y^2$ のときの式を書き下せ。

13.1.6　$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(a) + f_1'(a)(x-a) + (\text{剰余項})_1 \\ f_2(a) + f_2'(a)(x-a) + (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} (x-a) + \begin{pmatrix} (\text{剰余項})_1 \\ (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

かつ

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \begin{pmatrix} (\text{剰余項})_1 \\ (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix} = 0$$

であるから、

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} \qquad (2 \times 1 - \text{行列})$$

である。

13.1.7　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(a,b) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)(y-b) + (\text{剰余項})_1 \\ f_2(a,b) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)(y-b) + (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\text{剰余項})_1 \\ (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

かつ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} (\text{剰余項})_1 \\ (\text{剰余項})_2 \end{pmatrix} = 0$$

であるから、

$$J_f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \qquad (2 \times 2 - \text{行列})$$

である。

問 34. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(r,\theta) \\ f_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の点 (a,b) におけるヤコビ行列 $J_f(a,b)$ を計算し、$\begin{pmatrix} f_1(r,\theta) \\ f_2(r,\theta) \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} f_1(a,b) \\ f_2(a,b) \end{pmatrix} + J_f(a,b) \begin{pmatrix} r-a \\ \theta-b \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} f_1(r,\theta) \\ f_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ のときの式を書き下せ。

13.2　合成写像の微分

与えられた 2 つの写像

$$f : \mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad g : \mathbb{R}^m \ni \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

をそれぞれ点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ と点 $b = (b_1, \cdots, b_m)$ の近くで 1 次函数で近似すると

$$y = f(x) = f(a) + J_f(a)(x-a) + (\text{剰余項})_1 \text{ かつ } \lim_{x\to a} \frac{1}{|x-a|}(\text{剰余項})_1 = 0$$

$$z = g(y) = g(b) + J_g(b)(y-b) + (\text{剰余項})_2 \text{ かつ } \lim_{y\to b} \frac{1}{|y-b|}(\text{剰余項})_2 = 0$$

となるので、ここで $b = f(a)$ とすると、

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = g(b) + J_g(b)\,(f(x) - b) + (\text{剰余項})_2 \\ &= g(b) + J_g(b)\left\{(f(a) + J_f(a)(x-a) + (\text{剰余項})_1) - b\right\} + (\text{剰余項})_2 \\ &= g(b) + J_g(b)\left\{J_f(a)(x-a) + (\text{剰余項})_1\right\} + (\text{剰余項})_2 \\ &= g(b) + J_g(b)J_f(a)(x-a) + J_g(b)(\text{剰余項})_1 + (\text{剰余項})_2 \\ &= g(b) + J_g(b)J_f(a)(x-a) + (\text{剰余項})_3\end{aligned}$$

（ただし $(\text{剰余項})_3 = J_g(b)(\text{剰余項})_1 + (\text{剰余項})_2$ と置いた。）かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}(\text{剰余項})_3 = 0$$

となることが証明出来るので

$$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a) + J_{g\circ f}(a)(x-a) + (\text{剰余項})_4 \text{ かつ } \lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}(\text{剰余項})_4 = 0$$

であることと「比較」して（正確には 1 次近似の一意性により）

$$\boxed{J_{g\circ f} = J_g J_f \text{（連鎖律）}}$$

を得る。「f の線型近似 J_f と g の線型近似 J_g の合成写像は、f と g の合成写像 $g\circ f$ の線型近似 $J_{g\circ f}$ になっている」という至極もっともらしい主張である。成分で書くと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial (g\circ f)_l}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_l}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots\cdot & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(b) & \cdots\cdot & \frac{\partial g_l}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial z_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_l}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots\cdot & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_l}{\partial y_1} & \cdots\cdot & \frac{\partial z_l}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

となる。

特に $l = m = n = 1$ のときは

$$\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right) = \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right)\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)$$

となって一変数の時の「合成函数の微分」の公式に他ならない。

この後の「微分の変数変換」のところで使うのは $l=1$, $m=2$, $n=2$ の場合：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

の場合である。

問 **35.** $f(x)=(1+x)^2$, $g(y)=\sin y$ とするとき以下の問に答えよ。

(1) $x\to 0$ のときの $f(x)$ の一次近似 $f(0)+f'(0)x$ を計算し f のグラフ $y=f(x)$ と f の一次近似のグラフ $y=f(0)+f'(0)x$ の両方をひとつの xy 平面上に図示せよ。

(2) $y\to 1$ のときの $g(y)$ の一次近似 $g(1)+g'(1)(y-1)$ を計算し g のグラフ $z=g(y)$ と g の一次近似のグラフ $z=g(1)+g'(1)(y-1)$ のグラフの両方をひとつの yz 平面上に図示せよ。

(3) $\sin x=g(1)+g'(1)(x-1)+\varepsilon_1(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to 1}\frac{\varepsilon_1(x)}{x-1}=0$$

が成り立つ。$(1+t)^2=f(0)+f'(0)t+\varepsilon_2(t)$ とおくと

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_2(t)}{t}=0$$

が成り立つ。これらを用いて

$$\sin\left\{(1+t)^2\right\}=(\sin 1)+(\cos 1)\cdot 2t+(\cos 1)\varepsilon_2(t)+\varepsilon_1((1+t)^2)$$

であること、および

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\cos 1)\varepsilon_2(t)+\varepsilon_1((1+t)^2)}{t}=0$$

であることを証明せよ。

(4) 任意の定数 b に対し $\sin x=g(b)+g'(b)(x-b)+\varepsilon_1(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to b}\frac{\varepsilon_1(x)}{x-b}=0$$

が成り立つ。任意の定数 a に対し $(1+t)^2=f(a)+f'(a)(t-a)+\varepsilon_2(t)$ とおくと

$$\lim_{t\to a}\frac{\varepsilon_2(t)}{t-a}=0$$

が成り立つ。これらを用いて、$b=(1+a)^2$ なる仮定の下

$$\sin\left\{(1+t)^2\right\}=(\sin b)+(\cos b)\cdot 2(1+a)(t-a)+(\cos b)\varepsilon_2(t)+\varepsilon_1((1+t)^2)$$

であること、および

$$\lim_{t\to a}\frac{(\cos b)\varepsilon_2(t)+\varepsilon_1((1+t)^2)}{t}=0$$

であることを証明せよ。(つまり $(g\circ f)'(a))=g'(f(a))f'(a)$ が証明されたわけである。)

13.3　微分の変数変換

13.3.1　線型座標変換によるダランベール作用素の変換

空間 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

は、以下のような変数変換をすると解けることが知られている：

$$\begin{cases} \xi = x + t \\ \eta = x - t \end{cases}$$

x, t を未知数とする連立 1 次方程式と思って解くと

$$\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

という形になる。$z = h(x, t)$ として函数 g を

$$g(\xi, \eta) = h(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2})$$

で定義すると

$$g(x + t, x - t) = h(x, t)$$

となる。写像 f を

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t \\ x - t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

で定義すると $h = g \circ f$ となる。写像 f のヤコビ行列は

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix}$$

であり、写像

$$g : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto z = g(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$$

のヤコビ行列は

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

であり、写像

$$h : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto z = h(x, t) \in \mathbb{R}$$

のヤコビ行列は

$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

であるので、chain rule $J_h = \boxed{J_{g \circ f} = J_g J_f}$ によって

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix}$$

となる。右辺の行列の積を計算して左辺と比較すれば

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{cases}$$

を得る。今の場合、

$$\begin{cases} \xi = x + t \\ \eta = x - t \end{cases}$$

であるので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

あるいは

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} \tag{65}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{\partial \xi} + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) \\
&= -4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial \eta} = \varphi(\eta) \ \ (\varphi(\eta) \text{ は } \xi \text{ に依らない } \eta \text{ の任意の函数}) \\
&\Leftrightarrow z = \int \varphi(\eta) d\eta + \Psi(\xi) \ \ (\Psi(\xi) \text{ は } \eta \text{ に依らない } \xi \text{ の任意の函数}) \\
&\Leftrightarrow z = \Phi(\eta) + \Psi(\xi) \ \ (\Phi(\eta) \text{ は } \xi \text{ に依らない } \eta \text{ の任意の函数}) \\
&\Leftrightarrow z = \Phi(x-t) + \Psi(x+t) \ \ (\Phi, \Psi \text{ はそれぞれ任意の 1 変数函数})
\end{aligned}$$

問 36.

- 上記の f に対し、写像 $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列 $J_{f^{-1}}$ の各成分を偏微分の記号を用いて書け。
- $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi+\eta}{2} \\ \frac{\xi-\eta}{2} \end{pmatrix}$ であることを用いてヤコビ行列 $J_{f^{-1}}$ を具体的に計算せよ。
- 写像 $g : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto z = g(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ のヤコビ行列 J_g の各成分を偏微分の記号を用いて書け。
- 写像 $h : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto z = h(x, t) \in \mathbb{R}$ のヤコビ行列 J_h の各成分を偏微分の記号を用いて書け。
- $g = h \circ f^{-1}$ に連鎖律を適用すると $J_g = J_h J_{f^{-1}}$ である。これから講義ノートと同様に $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$ を $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}$ で表す式を求め、(65) から直接得られる式と一致することを確かめよ。

13.3.2　ラプラス作用素の極座標への変換

なお、以下は答案の書き方を説明しているのではない。内容を理解せず、試験などで形式だけまねて書いた場合は 0 点とする。

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

をいわゆる極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

に変数変換した式を求めたい。$z = g(x, y)$ として

$$h(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

写像 f を

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

で定義すると $h = g \circ f$ となる。写像 f のヤコビ行列は

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

であり、写像

$$g : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z = g(x, y) \in \mathbb{R}$$

のヤコビ行列は

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

であり、写像

$$h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto z = h(r, \theta) \in \mathbb{R}$$

のヤコビ行列は

$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

であるので、chain rule $J_h = \boxed{J_{g\circ f} = J_g J_f}$ によって

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

となる。右辺の行列の積を計算して左辺と比較すれば

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

を得る。今の場合、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

であるので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{66}$$

あるいは

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta \end{cases} \tag{67}$$

となる。我々は x, y を使った式を r, θ を使った式に書き直したいので、上の (67) を $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を未知数とする連立 1 次方程式と思って解くと

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \end{cases} \tag{68}$$

となる。これは (66) の両辺に $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列を右からかけても得られる：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

($2\times 2-$ 行列の逆行列の求め方を知っていればこの方が見通しがよい。)

(68) を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right) \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\
&+ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta\right)}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial r}\cos\theta-\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta\right)}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}-\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right) \\
&+ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta\right)}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta\right)}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\theta-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta \\
&- \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta\right)\frac{\sin\theta}{r}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta}{r}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r}\right\} \\
&+ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\sin^2\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta\right)\frac{\cos\theta}{r}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}
\end{aligned}
$$

となる。

13.3.3　その他の簡単で有用な応用例

$\dfrac{d\left(x^{a^x}\right)}{dx}$ を計算するとき、想像でやると失敗する。例えば

$$\frac{d\left(x^{a^x}\right)}{dx} \neq a^x x^{a^x-1}$$
$$\frac{d\left(x^{a^x}\right)}{dx} \neq a^x(\log a)x^{a^x} \log x$$

である。

一般に $A = e^{\log A}$ であることを用いて

$$x^{a^x} = e^{a^x \log x} = e^{e^{x\log a} \log x}$$

とすれば、e^x の微分と $\log x$ の微分を知っていれば、一変数の合成函数の微分と積の微分を使って計算できるが、ここでは多変数の合成函数の微分を用いてやってみよう。$z = s^{a^t}$ と置き、$s = x, t = x$ と置く。

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto z \in \mathbb{R}$$

なので

$$\frac{dz}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ds}{dx} \\ \frac{dt}{dx} \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{dx}$$

今の場合

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^{a^x})}{dx} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(s^{a^t})}{\partial s} & \frac{\partial(s^{a^t})}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ds}{dx} \\ \frac{dt}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t s^{a^t-1} & \frac{d(a^t)}{dt} s^{a^t} \log s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a^t s^{a^t-1} + a^t(\log a)s^{a^t} \log s \\
&= a^x x^{a^x-1} + a^x(\log a)x^{a^x} \log x
\end{aligned}$$

となる。（ここで $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$ は既知とした。）

問 37. $\dfrac{d\left(\displaystyle\int_0^x e^{-xy^2}dy\right)}{dx}$ を計算せよ。（ヒント：$z = \displaystyle\int_0^s e^{-ty^2}dy, s = x, t = x$ として上と同様にする。一般に定数 a, b と 2 変数の C^1 級函数 $f(t, y)$ に対して $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^b f(t, y)dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, y)dy$ であることは証明せずに用いてよい。）

13.4　第 13 節のまとめ

- 一般の（微分可能な）非線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は f のヤコビ行列 $J_f(a)$ から決まる線型写像 $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto J_f(a)\xi \in \mathbb{R}^m$ によって

$$f(x) = f(a) + J_f(a)(x-a) + (\text{剰余項})$$

  の形で 1 次近似される。これは一般の微分可能な非線型函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f'(a)$ から決まる線型写像 $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto f'(a)\xi \in \mathbb{R}$ によって点 a の近くで

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (\text{剰余項})$$

  の形で近似されることの一般化である。従ってヤコビ行列は微分係数の一般化である。
- 合成写像のヤコビ行列に関して、chain rule（連鎖律）と呼ばれる関係式

$$\boxed{J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)}$$

  が成り立つ。これはいわゆる「合成函数の微分」

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

  の一般化である。

14　微分方程式

14.1　代数方程式と函数方程式

方程式とは未知数あるいは未知函数が満たすべき条件式（等式）のことである：

代数方程式	函数方程式	微分方程式	差分方程式	積分方程式
四則演算	四則演算＋その他の演算	四則演算・微分	四則演算・差分	四則演算・積分
未知数	未知函数	未知函数	未知函数	未知函数
既知数	既知函数	既知函数	既知函数	既知函数

- 数も定数函数だと思えば函数の一種なので、代数方程式は函数方程式の一種だとも言える。従って函数方程式の概念は代数方程式の概念の一般化である。
- 函数方程式は四則演算の他にどういう演算を許容するかによって微分方程式・差分方程式・積分方程式などと呼ばれる。(差分微分方程式とか積分微分方程式とかいうものも勿論ある。)

代数方程式の例

- n 次代数方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (\text{未知数 } x\text{、既知数 } a_1, \cdots, a_n)$$

- 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdots \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdots \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\text{未知数 } x_1, \cdots, x_n\text{、既知数 } a_{11}, \cdots, a_{mn})$$

- 一般の代数方程式

$$\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \qquad\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ F_m(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (x_1, \cdots, x_n \text{ が未知数、} F_1, \cdots, F_m \text{ は与えられた } n \text{ 変数の多項式})$$

微分方程式の例

- ２階常微分方程式

  振り子の運動は、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$

  で記述されるのであった。ここで $\theta(t)$ がひもの角度を表す未知函数、g は重力加速度を表す既知数（定数函数と思えば既知函数)、l はひもの長さを表す既知数（既知函数）である。これは２階常微分方程式と言われるものの例である。ただし非線型であって大学 1 年程度の知識では解けないので線型近似して

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t)$$

  とすることが多いのは前に述べた通り。これは定数係数２階線型常微分方程式と呼ばれるものの例になっており、一般に定数係数線型常微分方程式は指数函数と多項式を用いて解けることが知られている。(線型代数でやるかも。)

- ２階線型偏微分方程式

  「微分の変数変換」のところで出て来たラプラシアン $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$（但しこれは x, y, z を座標とする３次元空間のラプラシアン）を用いると

  – Laplace（ラプラス）方程式

$$0 = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

  – Schrödinger（シュレーディンガー）方程式

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

  – 熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

  – 波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

  のような典型的な定数係数２階線型偏微分方程式を書き下すことが出来る。

差分方程式の例

- 差分 (difference) は階差と訳されることもある。いわゆる「階差数列」の階差である。数列 $\{a_n\}$ に対して

14.2　変数分離形の 1 階常微分方程式の解法

14.2.1　計算例

ウラニウムが時間的に一定の確率で崩壊して鉛になったとしよう。単位時間（但し非常に短い時間とする）当たりウラニウム原子 1 個当たりの鉛になる個数を今 a としよう。例えば単位時間当たりウラニウム原子の 100 個に 1 個が鉛になるとすれば、$a = 0.01$ という訳である。時刻 t におけるウラニウム原子の個数を $X(t)$ とすると、$X'(t)$ は単位時間当たりの増加数である。時刻 t の瞬間においては、単位時間当たり $X(t)$ 個のうち $a \cdot X(t)$ 個が鉛に変わってしまい、ちょうどその数だけウラニウム原子は減少するので、

$$X'(t) = -a \cdot X(t)$$

なる関係式が成り立つ。記号を簡単にするため $y = X(t)$ と置き、t の代わりに x を用いると

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

となる。両辺を y で割って

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a$$

としよう。y は 0 になる可能性もあるが、少なくとも y が 0 にならない範囲ではこうである。両辺を x について不定積分すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = -\int adx$$

であり、置換積分によって

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{y}dy$$

となるので

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int adx$$

となる。

$$\int \frac{1}{y}dy = \log|y| + C_1,$$
$$-\int adx = -ax + C_2$$

（C_1, C_2 は任意の定数）であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -a &\Leftrightarrow \log|y| + C_1 = -ax + C_2 \\ &\Leftrightarrow \log|y| = -ax + C_2 - C_1 \\ &\Leftrightarrow |y| = e^{-ax+C_2-C_1} = e^{C_2-C_1}e^{-ax} \\ &\Leftrightarrow y = \pm e^{C_2-C_1}e^{-ax}\end{aligned}$$

となる。$\pm e^{C_2-C_1}=C$ とおけば、少なくとも

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-a \Rightarrow y=Ce^{-ax} \ \ (C \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

であることがわかる。逆は代入してみればすぐ確かめられるから、結局

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-a \Leftrightarrow y=Ce^{-ax} \ \ (C \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

となる。実は

$$\frac{dy}{dx}=-ay \Leftrightarrow y=Ce^{-ax} \ \ (C \text{ は任意の定数})$$

であることが証明できる。記号を元に戻せば

$$X(t)=Ce^{-at} \ \ (C \text{ は任意の定数})$$

となる。両辺に $t=0$ を代入すると

$$X(0)=C$$

であるので

$$X(t)=X(0)e^{-at}$$

となる。ところで理科年表などに出ている放射性元素のデータはいわゆる「半減期」である。「半減期」とは、与えられた放射性元素のかたまりのうち半分が崩壊して別の元素に変わるのに要する時間である。これを T と置けば、

$$X(T)=\frac{1}{2}X(0) \Leftrightarrow X(0)e^{-aT}=\frac{1}{2}X(0) \Leftrightarrow e^{-aT}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{aT}=2 \Leftrightarrow aT=\log 2$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{\log 2}{T}$$

であって

$$X(t)=X(0)e^{-\frac{\log 2}{T}t}=X(0)e^{-(\log 2)\frac{t}{T}}=X(0)\left(e^{-\log 2}\right)^{\frac{t}{T}}=X(0)\left(\frac{1}{e^{\log 2}}\right)^{\frac{t}{T}}$$
$$=X(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

すなわち

$$\boxed{X(t)=X(0)e^{-\frac{\log 2}{T}t}}$$

あるいは

$$\boxed{X(t)=X(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$$

14.2.2　変数分離形の定義

$$\boxed{(y\text{ だけの式})\frac{dy}{dx} = (x\text{ だけの式})}$$

の形の一階常微分方程式を変数分離形と言う。

14.2.3　変数分離形の方程式の一般解法

与えられた変数分離形の一階常微分方程式

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

に対して、両辺を x について不定積分すると

$$\Longleftrightarrow \int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

であり、置換積分によって

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(y)dy$$

となるので

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

となる。$F(y)$, $G(x)$ をそれぞれ $f(y)$, $g(x)$ の原始函数とすると

$$\int f(y)dy = F(y) + C_1,$$
$$\int g(x)dx = G(x) + C_2$$

であるから

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow F(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

となる。$C_2 - C_1 = C$ とおけば

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow F(y) = G(x) + C \quad (C\text{ は任意定数}) \tag{69}$$

となって微分を含まない y, x の関係式となる。x の函数としての y の形が知りたければ、(69) を y について解いた形にすればよい：

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow y = F^{-1}\left(G(x) + C\right) \quad (C\text{ は任意定数})$$

14.3　第 14 節のまとめ

- 未知数のみたすべき条件式を（代数）方程式というのであった。これに対し未知函数の満たすべき条件式を函数方程式という。
- 函数方程式には条件式にどのような演算を許すかに応じて微分方程式・積分方程式・差分方程式などがある。
- 微分方程式は常微分方程式と偏微分方程式とに分かれる。また線型微分方程式と非線型微分方程式とにも分かれる。
- 変数分離形の一階常微分方程式は両辺を積分すると微分を含まない関係式に変換できるので「解ける」。