> 行列 A の rank が r であったとき、
> 非零の固有値の積 λ 1, λ 2,..., λ r について：
>
> λ 1 λ 2... λ r is the absolute value of the sum of
> determinants of all the principal r × r cofactor
> of A.

実際に成り立つのは次のようなことです：

定理 1. $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ の 0 でない固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とするとき、

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r = \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_r)} \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_r} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \cdots & a_{i_r i_r} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。(但し、$\displaystyle\sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_r)}$ は、$(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ が $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ を満たす整数の r-組全体を渡る $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 個の和である。)

"principal r × r cofactor "というのが何を指すのか私は知りませんが、上の

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_r} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \cdots & a_{i_r i_r} \end{pmatrix}$$

という量は、$r \times r$-主小行列式あるいは r 次主小行列式 (r-th principal minor) と呼ばれます。余因子 (cofactor) というのは、与えられた行列からいくつかの行と列を除いて出来る小行列の行列式に適当な符号を掛けたものを言います。cofactor の意味がこの通りだとすると "determinants of all the principal r × r cofactor"というのは行列式の行列式を取っていることになって変ですね。「与えられた行列からいくつかの行と列を除いて出来る小行列」を cofactor と呼んでいるのだとすると、"the absolute value"と言っているのは符号の問題を気にしているのだと思いますが、今度は符号が出てきません。そういうわけで "the absolute value of the sum of determinants of all the principal r × r cofactor"というのは、私には何を言っているのかよくわかりません。前のメイルでも述べたことですが、一般には $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r$ という量が正かどうかわかりません（A が Hermite 行列と仮定しても、固有値が実数とわかるだけで、0 でない固有値すべての積が正かどうかわかりません）ので、"absolute value"を考えるのは余り意味がないと思います。

証明. $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1(A)\lambda^{n-1} + a_2(A)\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^r a_r(A)\lambda^{n-r} \cdots + (-1)^n a_n(A)$ とおくと、

$$a_r(A) \quad = \quad \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)} \det \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} \end{pmatrix}$$

となる。(これは行列式を普通に展開すれば出る。定理 2 参照。)

行列 A の 0 でない固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ であることから、適当な可逆行列 S を用いて、

$$A = STS^{-1}$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & & & & & & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & * & & & & \cdot \\ \cdot & & & & 0 & \lambda_r & * & & & \cdot \\ \cdot & & & & & 0 & 0 & * & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot & \cdot & * \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と三角化できるので、$\det(\lambda I_n - A) = \det\left(\lambda I_n - STS^{-1}\right) = \det\left(S\left(\lambda I_n - T\right)S^{-1}\right) = \det S \det\left(\lambda I_n - T\right) \det S^{-1} = \det\left(\lambda I_n - T\right)$

従って、$a_r(A) = a_r(T) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r$ □

上の証明で用いた事実を証明しておく:

定理 2. $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1(A)\lambda^{n-1} + a_2(A)\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^r a_r(A)\lambda^{n-r} \cdots + (-1)^n a_n(A)$ とおくと、

$$a_r(A) \quad = \quad \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_r)} \det \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} \end{pmatrix}$$

となる。

証明.

$$\det(\lambda I_n - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda & \cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ -a_{n1} & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda & \cdots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & -a_{n2} & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -a_{1n} \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ 0 & \cdots & \lambda & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+\cdots$$

$$+\det\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda & \cdots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{41} & 0 & -a_{43} & \lambda & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ -a_{n1} & 0 & -a_{n3} & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+\det\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & \cdots & \lambda & -a_{n-2,n-1} & -a_{n-2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n,n-1} & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+\cdots$$

$$+\det\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
= \lambda^n \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
-\lambda^{n-1} \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \right)
$$

$$
+ \cdots
$$

$$
+ \lambda^{n-2} \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \cdots \right.
$$

$$
\left. + \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \right)
$$

$$
+ \cdots
$$

$$
+ (-1)^n \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^r a_r \lambda^{n-r} \cdots + (-1)^n a_n
$$

□