1　命題論理

1.1　形式論理とは

形式論理というのは論理的な推論の、その内容を無視して構造だけを取り出して考えるものである。例えば

「風が吹けば桶屋が儲かる」

というのを「風が吹く」を P と書き、「桶屋が儲かる」を Q と書けば

「P ならば Q」

と書くことが出来る。また、

「犬も歩けば棒に当たる」

というのを「犬が歩く」を R と書き、「棒に当たる」を S と書けば

「R ならば S」

と書くことが出来る。２つの文章の内容は全く別であるが、論理的な構造としては同じである。即ち、どちらも、P ということが起これば必ず Q ということが起こる、R ということが起これば必ず S ということが起こる、という主張である。

1.2　命題、真と偽

論理的な推論というものは、既に正しいと分かっていることあるいは正しいと仮定していることから出発して、論理的に正しい推論だけを用いて正しい結論を得るためのものである。（初等幾何学における証明がその典型 (classic) である。）従って、内容を無視して論理的な推論の構造にだけ着目するときには、正しいか正しくないかだけに着目すればよい。文章の正しいか正しくないかだけに着目するときこれを（ここでは）**命題**と呼ぶことにしよう。命題が正しいことを「真 (true)」とも言う。命題が正しくないことを「偽 (false)」とも言う。

1.3　かつ・または・でない・ならば

論理的な推論の構造、すなわち形式論理は、もとになるいくつかの命題と「かつ・または・でない・ならば」という４つの言葉を組み合わせて記述される。例えば P, Q, R, S なる命題に対して、

「((P かつ Q) または (R でない)) ならば (S でない)」

というような命題を考えることが形式論理である。さきほどの P, Q, R, S を代入すれば

((「風が吹く」かつ「桶屋が儲かる」) または (「犬が歩く」でない)) ならば (「棒に当たる」でない)

となる。もうすこし日本語らしくすれば

「((風が吹いて桶屋が儲かる) かまたは犬が歩かない) ならば棒に当たらない」

となる。(日本語では普通こんな括弧はつけないのでまだ日本語になっているとは言えないが。) さて、この命題が真だとすると、例えば風が吹いて桶屋が儲かって犬が歩くとすると棒に当たるのだろうか？　あるいは風が吹かずに桶屋が儲かって (犬が) 棒に当たらなければ、犬は歩くのか歩かないのか？

1.3.1　かつ

「P かつ Q」は P も Q も両方とも真のとき真であり、それ以外のとき (即ち P と Q のうちの少なくとも一方が偽のとき) 偽であると約束する。

1.3.2　または

「P または Q」は P と Q のうち少なくとも一方が真のとき真であり、それ以外のとき (即ち P, Q ともに偽のとき) 偽であると約束する。

1.3.3　でない

「P でない」は P が偽のとき真、P が真のとき偽であると約束する。

1.3.4　ならば

「P ならば Q」は P が真のときは更に Q が真のとき「P ならば Q」も真、Q が偽のとき「P ならば Q」も偽、P が偽のときは Q の真偽にかかわらず「P ならば Q」は真であると約束する。例えば「風が吹けば桶屋が儲かる」という命題は、風が吹かない限りは桶屋が儲かろうと儲かるまいと間違った事は言っていないので真なのである。

1.4　真理値表

以上の「かつ・または・でない・ならば」の定義を表にすると以下のようになる：

P	P でない
真	偽
偽	真

P	Q	P かつ Q	P または Q	P ならば Q
真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	偽
偽	真	偽	真	真
偽	偽	偽	偽	真

こういうのを**真理値表**という。真理値表があれば、P, Q 等の命題の元の内容や「かつ・または・でない・ならば」の言葉の意味を考慮せずに、命題の真偽を機械的に求めることが出来る。

1.5　記号論理

更に徹底して、「かつ・または・でない・ならば」の言葉の意味にとらわれないためにこれらをそれぞれ「$\wedge$・$\vee$・$\neg$・$\Rightarrow$」で表す。このような記号を用いて表された命題を**論理式**と言い、論理式を扱う理論を**記号論理**という。例えば前に挙げた

「（（風が吹いて桶屋が儲かる）かまたは犬が歩かない）ならば棒に当たらない」

を「風が吹く」を P、「桶屋が儲かる」を Q、「犬が歩く」を R、「棒に当たる」を S と書けば

$$「((P \wedge Q) \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg S)」$$

と極めてドライに表現される。ついでに真を 1、偽を 0 で表すことにすれば、先の「かつ・または・でない・ならば」の定義の真理値表は：

P	$\neg P$
0	1
1	0

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

となる。これを用いれば

P	Q	R	S	$P \wedge Q$	$\neg R$	$(P \wedge Q) \vee (\neg R)$	$\neg S$	$((P \wedge Q) \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg S)$
0	0	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	0	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	0	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	0	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

ここで宿題に答えておこう。

「（（風が吹いて桶屋が儲かる）かまたは犬が歩かない）ならば棒に当たらない」

が正しいとすると、風が吹いて桶屋が儲かって犬が歩くとすると棒に当たるのだろうか？

答は No である。P, Q, R, S 共に真とすると命題は偽であることが表から分かるからである。

それでは、風が吹かずに桶屋が儲かって（犬が）棒に当たらなければ、犬は歩くのか歩かないのか？

答は「どちらとも言えない」である。P が 0 で Q が 1 で S が 0 のところを見ると R が $0, 1$ どちらの場合も命題 $((P \wedge Q) \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg S)$ は真であることが分かるからである。

こういったことを日本語の文章のままで論理的に考えることは出来なくはないが非常に難しい。しかし記号論理で真理値表を用いるとまちがいなく確かめることが出来る。

1.6　論理法則

1.6.1　de Morgan の法則

例えば「今日か明日のうち少なくとも一方は天気がよい」の否定は「今日明日共に天気が悪い」であることは当たり前であろう。これを de Morgan の法則という。「今日天気がよい」を P、「明日天気がよい」を Q と書けば「今日か明日のうち少なくとも一方は天気がよい」は $P \vee Q$ と書ける。これの否定は $\neg(P \vee Q)$ という記号で書かれる。これと「今日明日共に天気が悪い」すなわち $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ が同じだというのである。「同じ」という意味は真理値表が同じということである。確かめてみよう：

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

$\wedge$ と $\vee$ を取り換えても同じ事が成り立つ（「今日明日共に天気がよい」の否定は「今日か明日のうち少なくとも一方は天気が悪い」である）ので

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

という事になる。（ここで「$\equiv$」は同等な命題、即ち真理値が同じであることを表す。）

1.6.2　「ならば」の言い換え

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$$

「P ならば Q」ということと「P でないかまたは Q」が同じ意味だなどと言われると非常に奇妙な感じがするかも知れないが、真理値表は確かに一致している：

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P) \vee Q$
0	0	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	$\square$	$\square$	$\square$

1.6.3　二重否定

日常言語では二重否定は必ずしも肯定と同じ意味ではないが、形式論理・記号論理においては真理値表が同じなので同じと見做される：

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	$\square$	$\square$
1	$\square$	$\square$

1.6.4　分配法則

足し算と掛け算の間に成り立つ

$$a(b+c) = ab + ac$$

のような関係を**分配法則**というが掛け算と足し算を「$\wedge$（かつ)」と「$\vee$（または)」あるいは「$\vee$（または)」と「$\wedge$（かつ)」に置き換えた関係（これも分配法則と呼ぶ）が成り立っている：

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	0	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

1.6.5　結合法則

足し算についても掛け算についても

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$

という関係が成り立っていて、普段あたりまえのように使っていると思うが、これらの法則を**結合法則**という。「$\wedge$（かつ）」および「$\vee$（または）」ついても同じような関係

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$
$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

が成り立っていることは、「かつ」および「または」の意味を考えれば矢張り自明であろう。（証明するには真理値表を較べてみなければならない。）これも結合法則と呼ばれる。そして、足し算や掛け算の場合と同様、結合法則をふまえて、こういう場合の括弧は省略するのが普通である。即ち、

$$P \wedge Q \wedge R$$

とか

$$P \vee Q \vee R$$

とか書くのが普通である。$P \wedge (Q \wedge R)$ と $(P \wedge Q) \wedge R$ は同等（即ち真理値表が同じ）なだけで一応別の命題であるが、今後は区別せずに同じ命題と見做し、単に $P \wedge Q \wedge R$ と書くことにする。$P \vee Q \vee R$ についても同様である。

1.6.6　交換法則

足し算についても掛け算についても

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

という関係が成り立っているが行列の掛け算に関しては必ずしも成り立たないことはよく御存知であろう。これは**交換法則**と呼ばれる。行列の積に関しては一般には交換法則が成り立たないわけである。「$\wedge$（かつ）」および「$\vee$（または）」に対しても

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$
$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

が成り立つことは真理値表を書いてみるまでもなく分かることであろう。

1.6.7 その他の論理法則（読まなくても良い）

与えられた命題から別の同等な命題に変形する論理法則は他にも色々考えられるが、既に述べた分配法則・結合法則・交換法則の他に**吸収法則**

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

および**相補法則**

$$P \wedge (\neg P) \equiv 0$$
$$P \vee (\neg P) \equiv 1$$

（ただし 0 は常に真理値 0 の命題、1 は常に真理値 1 の命題で、どんな命題 P に対しても $P \wedge 0 \equiv 0$, $P \vee 1 \equiv 1$ が成り立つものとする。）を組み合わせればすべての法則が得られる。（と思う。そういうことを書いてある文献はまだ見つけていないが、多分よく知られた事実だと思う。ここで「すべての法則が得られる」という意味は、与えられた 2 つの互いに同等な命題に対して一方からもう一方へ上に挙げた法則だけを用いて変形できる、という意味である。）従ってこれ以上憶える必要はない。

2　逆と対偶、必要条件と十分条件

2.1　逆と対偶

「$P \Rightarrow Q$」に対して「$Q \Rightarrow P$」を$\boxed{\qquad}$、「$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$」を$\boxed{\qquad}$、「$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$」を$\boxed{\qquad}$と呼ぶ。一般に $X \Rightarrow Y \equiv (\neg X) \vee Y$ であったのでこれを用いると

$$
\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) &\equiv (\neg P) \vee Q \\
(Q \Rightarrow P) &\equiv (\neg Q) \vee P \equiv P \vee (\neg Q) \\
((\neg P) \Rightarrow (\neg Q)) &\equiv (\neg\neg P) \vee (\neg Q) \equiv P \vee (\neg Q) \\
((\neg Q) \Rightarrow (\neg P)) &\equiv Q \vee (\neg P) \equiv (\neg P) \vee Q
\end{aligned}
$$

となり、真理値表を書いてみるまでもなく、元の命題「$P \Rightarrow Q$」とその$\boxed{\qquad}$「$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$」は同等な命題であることが分かる。

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

一方、$(\neg P) \vee Q$ と $P \vee (\neg Q)$ の真理値表を比較すれば分かるが、元の命題「$P \Rightarrow Q$」とその$\boxed{\qquad}$「$Q \Rightarrow P$」あるいは$\boxed{\qquad}$「$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$」は同等でない。これを標語的に

逆必ずしも真ならず

と言ったりする。

これはあたりまえなようであるが、日常生活において混同する人は多いはずである。

「ゲームばかりやっているとおやつをやらないよ」

と言ったとする。それで「ゲームをやめたんだからおやつを頂戴」と言う子供におやつをやらないお父さんに「お父さんのうそつきー」と子供が言ったとする。この子の言うことは正しくない。この子は元の命題とその逆、あるいは裏とを混同している。

「(子供が) ゲームをする」を P とし、「(お父さんが子供に) おやつをやる} を Q とすれば、「ゲームをやるとおやつをやらない」は「$P \Rightarrow (\neg Q)$」である。「ならば ($\Rightarrow$)」の定義のところで述べたように、「$P \Rightarrow (\neg Q)$」はあくまでも P が真であるときについて述べているのであって P が偽であるときについては何も言っていないのである。つまり子供がゲームをしないときにお父さんがおやつをやろうとやるまいと嘘はついていないのである。子供の言う「ゲームをしなければおやつをやる」は「$(\neg P) \Rightarrow Q$」もとの命題の裏「$(\neg P) \Rightarrow (\neg\neg Q)$」あるいは逆「$(\neg Q) \Rightarrow P$」と同等な命題であるが、元の命題とは同等でない。

ところで、「お父さん、『ゲームをすればおやつをやらない」の対偶は「おやつをやればゲームをしない』だよ。だからおやつを頂戴」と言う子供がいたらまことに賢い子であるが、お父さんはだまされてはいけない。「$P \Rightarrow \neg Q$」の対偶「$(\neg\neg Q) \Rightarrow \neg P$」と同等な「$Q \Rightarrow \neg P$」の主張していることは勿論そういう意味ではない。

2.2 必要条件と十分条件

「$P \Rightarrow Q$」が成り立つとき、Q を P の（P から必然的に導かれる条件という意味で）necessary condition 即ち**必要条件**（そういう意味では誤訳といってもいいかも知れない。）逆に P を Q の（Q を導くのに十分だという意味で）sufficient condition 即ち**十分条件**という。

- （2003 年度）実数 x, y に対して、「$x = 1$ でないかまたは $y = 1$ でない」は $xy = 1$ でないための $\boxed{}$。
- （2004 年度）実数 x, y に対して、$xy > 0$ は「$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ 」であるための $\boxed{}$。
- （2005 年度）実数 x, y に対して、$x + y \geqq 1$ は「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ 」であるための $\boxed{}$。
- （2006 年度）実数 x, y に対して、$x^2 + y^2 = 1$ は「$x \leqq 1$ かつ $y \leqq 1$ 」であるための $\boxed{}$。
- （2007 年度）実数 x, y に対して、「$x = 0$ または $y = 0$」は $x^2 + y^2 = 0$ であるための $\boxed{}$。
- （2008 年度）実数 x, y に対して、$x^2+y^2 \leqq 1$ は「$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 1$ 」であるための $\boxed{}$。

3　述語論理

3.1　条件

前節で「必要条件」・「十分条件」と言って「必要命題」・「十分命題」と言わなかったのには訳がある。

実数 x, y に対して、$x^2 + y^2 \leq 1$ は「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」であるための
$\boxed{\text{十分条件だが必要条件でない}}$。

と言うとき、$x^2 + y^2 \leq 1$ は真か？それとも偽か？ 例えば $x = 1, y = 0$ なら $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$ だから $x^2 + y^2 \leq 1$ は真だが、$x = 1, y = 1$ なら $1^2 + 1^2 = 2 > 1$ だから $x^2 + y^2 \leq 1$ は偽である。x, y が特定されないままだと真とも偽とも言えない。むしろ x, y に何を代入するかによって真になったり偽になったりすることが重要である。

このように変数（数とは限らないので変<u>項</u>と呼ぶ場合もある。英語ではいずれにせよ variable）あるいは未知数を含む文章でその変数に具体的な値を代入すると命題になっているものを**条件**と言う。

例　変数 x, y に対する条件 $x^2 + y^2 \leq 1$ を $P(x, y)$ という記号で書くとき、上で述べたことは、$P(1, 0)$ は $1^2 + 0^2 \leq 1$ という命題であって真であり、$P(1, 1)$ は $1^2 + 1^2 \leq 1$ という命題であって偽である、という風に述べられる。

例　「風が吹けば x が儲かる」という文章を $P(x)$ と書けば、$P(x)$ のままでは x が特定されず真偽が定まらないので命題ではないが $P(\text{桶屋})$ のように具体的に代入すれば真偽が定まるので、$P(x)$ は x に関する条件と言えることになる。（ただしこの話ではすべての人に対して風が吹くと儲かるか儲からないか判定できるものとしている。）

変数 x に対して x に数を代入するごとに数 $f(x)$ が決まるときに $f(x)$ を x の函数（関数）と言ったように、x に具体的な値を代入するごとに命題 $P(x)$ が決まるという意味で、条件のことを**命題函数**とも呼ぶようである。また、「x が条件 $P(x)$ を満たす」という風に、文章を主語と述語の 2 つに分けたときの述語にあたるものが条件 $P(x)$ だという意味で、条件のことを「述語」と言ってもよいであろう。（主語 x に具体的な値を代入して初めて完結した文章—即ち命題—になる訳である。）「述語論理」という言葉はその辺から来ているものと思われる。

3.2 任意の〜($\forall$〜)・ある〜($\exists$〜)

変数 x に対する条件 $P(x)$ は x に特定の値を代入しないと真か偽か分からない、と述べたが、「$P(x)$ は x の値に関係なく、今考えている範囲のどの x に対しても成り立つ」という命題を記号で

$$\forall x P(x)$$

と書いて「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」あるいは「どの x に対しても $P(x)$ が成り立つ」あるいは「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」などと読む。（それぞれ少しずつニュアンスが違うので、数学で実際に使うときは適切に使い分けるが、論理的には同じ意味である。）x の変域が例えば $\{0,1,2\}$ の範囲であれば

$$(\forall x P(x)) \equiv P(0) \land P(1) \land P(2)$$

である。x の変域が例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ の範囲であれば

$$(\forall x P(x)) \equiv P(0) \land P(1) \land P(2) \land \cdots$$

ただし、右辺はいくら書いても終わらないし、そもそもそんな論理式は定義されていない。（論理式はあくまでも有限個の記号の列でなければならない。）ましてや x の変域が $\mathbb{R} = \{$ 実数全体 $\}$ であれば右辺にあたる式は書きようもない。それで左辺のような記号を使うのである。

実数 $x,\ y$ に対して、$x^2+y^2 \leq 1$ は「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」であるための $\boxed{}$。

という問題を解くとき、$x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow$「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」が真か偽か、$x^2+y^2 \leq 1 \Leftarrow$「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」が真か偽かを判定したが、正確に言えば $x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow$「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」等は x, y に関する条件であって、x, y を特定して命題にしなければ真とも偽とも判定できない。真偽を調べるべき命題は

任意の $x,\ y$ に対して $[x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow$「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$」$]$
任意の $x,\ y$ に対して $[x^2+y^2 \leq 1 \Leftarrow$「$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$」$]$

である。論理記号をもっと使えば

$$\forall x \forall y \left[x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow (-1 \leq x \leq 1) \land (-1 \leq y \leq 1)\right]$$
$$\forall x \forall y \left[x^2+y^2 \leq 1 \Leftarrow (-1 \leq x \leq 1) \land (-1 \leq y \leq 1)\right]$$

ということになる。$x,\ y$ の変域が実数全体であることを論理式の中に入れたければ、

$$\forall x \forall y \left[x, y \text{ が実数} \Rightarrow \big(x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow (-1 \leq x \leq 1) \land (-1 \leq y \leq 1)\big)\right]$$
$$\forall x \forall y \left[x, y \text{ が実数} \Rightarrow \big(x^2+y^2 \leq 1 \Leftarrow (-1 \leq x \leq 1) \land (-1 \leq y \leq 1)\big)\right]$$

とすればよろしい。

3.2.1 一般化された de Morgan の法則

$\forall x P(x)$ 即ち「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定 $\neg(\forall x P(x))$ は何であろうか。それは「$P(x)$ が成り立たないような x がある」である。言い換えると「$\neg P(x)$ が成り立つような x がある」である。そこで一般に「$Q(x)$ が成り立つような x がある」ということを

$$\exists x Q(x)$$

と書いて「ある x について $Q(x)$ が成り立つ」あるいは「$Q(x)$ となる x が存在する」あるいは「$Q(x)$ が成り立つような x がある」などと読む。この記号を用いると「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定が「$P(x)$ が成り立たないような x がある」であることは

$$\boxed{\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))}$$

と書かれる。

これは de Morgan の法則

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

の一般化になっている。何故なら、x の変域が例えば $\{0, 1, 2\}$ のときは

$$(\forall x P(x)) \equiv P(0) \wedge P(1) \wedge P(2)$$

だったが、$\exists x Q(x)$ は $x = 0, 1, 2$ の 3 つのうちの少なくともひとつに対して $Q(x)$ が成り立つことだから

$$\exists x Q(x) \equiv Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2)$$

である。従って

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \neg(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2))$$
$$\exists x (\neg P(x)) \equiv (\neg P(0)) \vee (\neg P(1)) \vee (\neg P(2))$$

であるから

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$$

であることと

$$\neg(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2)) \equiv (\neg P(0)) \vee (\neg P(1)) \vee (\neg P(2))$$

であることは同じことである。x が無限個の値を取り得るときは de Morgan の法則からは出ないが、その一般化になっていると言うことが出来る。

一方 $\exists x P(x)$ 即ち「$P(x)$ が成り立つような x がある」の否定は「$P(x)$ が成り立つような x がない」言い換えると「どんな x に対して $P(x)$ は成り立たない」また言い換えると「どんな x に対して $\neg P(x)$ が成り立つ」と同等である：

$$\boxed{\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))}$$

例題 1. 「すべての人に子がいるならばある国ではすべての人が飢える」を否定するとどうなるか。