

2 集合

2.1 集合とは

集合とは何個かのもの（0個の場合も無限個の場合もある）を集めてひとつのものと考えたもののことである。例えば、「機械・社会環境系1年Aクラス」というものは物理的には存在しないが、このクラスに属する学生をすべて合わせてひとつのものと考えれば、それが「機械・社会環境系1年Aクラス」であると考えることが出来る。

2.2 元（要素）

x というものが A という集合に属することを

$$x \in A$$

と書いて、「 x は A に属する」、「 x は A の**元** (element) である」、「 x は A の**要素** (element) である」などと読む。（ $\in$ はギリシア語の ϵ でローマ字の e にあたる文字である。）また、この否定、すなわち「 x は A に属さない」、「 x は A の**元**でない」、「 x は A の**要素**でない」を

$$x \notin A$$

という記号で書く。

例えば

池田君 $\in$ 「機械・社会環境系1年Aクラス」

山田君 $\notin$ 「機械・社会環境系1年Aクラス」

という訳である。数学的には、集合とは、今考えている範囲で、どの x に対しても x がその集合に属するか属さないかがそれぞれどちらかにはっきり決まっているもののことである。

2.3 集合の表し方—内包的表示と外延的表示

集合の表し方としては2通りの方法がある。

第1の方法は、その元を全て列挙するというものである。例えば、集合 A が 0, 2, 4 という3つの元から成る集合であるとき、

$$A = \{0, 2, 4\}$$

と書く。このような書き表し方を哲学の用語を借りて**外延的 (extentional) 表示**という。この方法は大変分かりやすいが、元の個数が無限個だったり、有限個でも非常に多かたりすると実際に表すことは不可能であるという欠点がある。

第2の方法は、集合の元が満たすべき条件を指定する、というものである。(これをやはり哲学用語を借りて**内包的 (intentional) 表示**と言う。) 上の例で言うと

$$A = \{0 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の偶数の全体} \}$$

というのが同じ集合の内包的表示である。

一般に、与えられた条件 $P(x)$ が 真 となるような x 全体の集合を

$$\{P(x) \text{ を満たす } x \text{ の全体} \}$$

あるいは

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。 $\{x; P(x)\}$ と書くこともある。上の例で言うと

$$\{0, 2, 4\} = \{x \mid x \text{ は偶数} \wedge 0 \leq x \leq 5\}$$

の左辺が外延的表示、右辺が内包的表示である。特に、 $P(x)$ が集合 A の要素 x に関する命題関数とする時、 $P(x)$ が 真 となるような A の要素 x 全体の集合を

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

で表す。 $\{x \mid P(x), x \in A\}$ あるいは $\{x; P(x), x \in A\}$ と書くこともある。

2.4 集合の例

- (1) 自然数全体の集合のように、その集合に属する元の個数が無限個の場合、全ての元を列挙するのは不可能なので、

$$\mathbb{N} = \{ \text{自然数全体} \} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

などと (誤魔化して) 書いたりする。この $\mathbb{N}$ という記号は、自然数全体の集合を表すものとして、数学において、標準的に使われているものである。数の集合を表す他の標準的な記号としては、

$$\mathbb{Z} = \{ \text{整数全体} \} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{ \text{有理数全体} \}$$

$$\mathbb{R} = \{ \text{実数全体} \}$$

$$\mathbb{C} = \{ \text{複素数全体} \}$$

などがある。

元の個数が0個の集合を $\emptyset$ という記号で表し **空集合** という。内包的表示で表せば $\emptyset = \{\}$ である。空集合に対しては

$$\forall x [x \notin \emptyset]$$

が成り立つ。

- (2) 正の実数全体の集合は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ と表される。
- (3) 偶数である自然数全体の集合は、 $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ と書いても大体意味は通じる。しかし厳密に言うとは、これでは8の後にどのような数が来るのかはわからない。

上の定義に従って、 $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は偶数}\}$ と書いた方が、正確ではある。

しかし、ちょっと変則的ではあるが、 $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ と書いた方が、書き方としてはより自然であって、このような表現の方がよく使われる。

要は、縦棒の左側にその集合の要素を書き、右側にその要素が満たすべき条件を書く、ということである。

奇数である自然数全体の集合も、この書き方で行くと、 $\{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ と書ける。

問題 2.1.

- (1) 5の倍数となるような自然数全体の集合を表せ。
- (2) 4で割ると余りが3となるような自然数全体の集合を表せ。

2.5 集合の包含関係と同等性

定義 2.1.

- (1) 集合 B の全ての元が集合 A の元である時、

$$B \subseteq A$$

と書いて ($B \subseteq A$ と書く人も $B \subset A$ と書く人もいる)、 B は A の **部分集合** であるという。

(2) $B \subseteq A$ かつ $A \subseteq B$ が成り立つ時、 $A = B$ と定義する。

(3) $B \subset A$ であって $B \neq A$ のとき、 B は A の **真部分集合** であると言う。 $B \subseteq A$ と書いたときは、 B が A の真部分集合かもしれないし、 $B = A$ かもしれない。真部分集合であることをはっきり表したいときは、 $B \subsetneq A$ あるいは $B \subset A$ などと書く。(真部分集合の意味で $B \subset A$ と書く人もいるがこれはやめた方がよい。)

例 2.1.

(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(2) $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

問題 2.2.

(1) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

(2) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

2.6 素朴な集合論に潜むパラドックス

さて、最初に述べたような素朴な集合の定義は、不正確かつ曖昧なもので、さらに悪いことに、重大な矛盾を含んでいることが知られている。例えば

Russell の paradox : U を集合全体のなす集合とし、 U の部分集合 W を次のように決める。

$$W = \{x \in U \mid x \notin x\}$$

こうすると、

$$W \in W \quad \equiv \quad W \in \{x \in U \mid x \notin x\} \quad \equiv \quad W \notin W$$

であり、

$$W \in W \quad \equiv \quad W \notin W$$

という矛盾が成立してしまう。

矛盾を含む理論は、背理法を用いると全ての命題が真かつ偽となり、無意味なものとなってしまふ。

このようなパラドックスは、いったいなぜ生じてしまったのだろうか？「全ての集合全体の集合」というものを考えたために、このような事態に陥ったわけだが、そもそも「集合」というものは一体何なのか？ 実は我々は、集合というものを厳密に定義せずに、ただ単に「物の集まり」という曖昧な概念で済ませていたのである。集合を厳密に定義しなければ、数学的に正確な議論ができないことは、良く考えてみると、当然のことである。

20世紀の一部の数学者の努力によって、現在では一応矛盾を含まないと思われる集合の定義が得られているがここでは述べない。(公理的集合論の本を参照のこと。)

2.7 集合算

定義 2.2.

(1) A, B を集合とする。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

を A と B の **和集合** (union または sum) という。

(2)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

を A と B の **共通部分** (intersection) という。

問題 2.3. A, B, C を集合とする。

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。

定義 2.3.

(1)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

とする。 $A \setminus B$ は、 $A - B$ と書くこともある。

(2) ある集合 X があって、全ての議論が X の中で行われる、ということを前提としているとき、 X を **全体集合** という。

X が全体集合のとき、部分集合 $A \subseteq X$ に対して、 $X \setminus A$ を A^c あるいは $\bar{A}$ と書き A の **補集合** という。

(3) 対象 a, b の対 (ペア) を (a, b) で表す。 $a = c$ かつ $b = d$ のとき $(a, b) = (c, d)$ であると決める。

(4) 集合 A, B に対して、 $a \in A, b \in B$ の対 (a, b) の全体からなる集合を $A \times B$ で表して、集合 A, B の **直積集合** という。記号で書けば

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

である。

(5) 同様に、 $A_1, A_2, \dots, A_n$ を集合とした時、

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \quad (1 \leq i \leq n) \}$$

を $A_1, A_2, \dots, A_n$ の直積集合という。

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合、 $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であった。 n 個の $\mathbb{R}$ の直積集合を $\mathbb{R}^n$, n 個の $\mathbb{C}$ の直積集合を $\mathbb{C}^n$ と書く。

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ なので、2つの実数 x, y のペア (x, y) 全体の集まりである。 (x, y) は平面上の点と見なすことができるので、 $\mathbb{R}^2$ は平面上の点全体の集合と見なすことができ、2次元平面と同一視することができる。同様に、 $\mathbb{R}^3$ は3次元空間と見なすことができる。

問題 2.4. X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき、次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

(2) de Morgan の法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$