3　写像

3.1　Dirichlet の意味での「函数」の定義

「函数」とは何かと問われれば、例えば２次函数 x^2 とか三角函数 $\sin x$ のように何らかの具体的な式で表されているものを思い浮かべるが、それでは

例 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{ が無理数の時}) \\ 1 & (x\text{ が有理数の時}) \end{cases}$$

のように、式とは言い難くグラフも描けないようなものも函数と認めて良いであろうか？　よいとすれば「函数」とは何か？

Dirichlet 流の「函数」の定義をわかりやすく述べるとすれば、例えば

> ある規則 f によって、すべての実数 x に対してそれぞれ実数 $f(x)$ が定まるとき、規則 f を函数と呼ぶ。

ということが出来る。上の例では「規則」は一言で表現できるようなルールであったが、ともかくすべての実数（無限個ある！）ひとつひとつに対してそれぞれ値を指定すればよいので、まとまった「規則」である必要はない。そういう意味では

> すべての実数 x に対してそれぞれ実数 $f(x)$ を指定するとき、この指定の仕方 f を函数と呼ぶ。

といった方が良いかも知れない。

「函数」の概念を初めてこのように捉えたのは、Dirichlet(1805-1859) の 1837 年の論文とされている。当時、Fourier(1768-1830) に代表される一連の研究により、不連続な函数も含めておよそあらゆる函数がフーリエ級数（三角函数の無限和）で表されるらしい、ということがわかってきていたのであるが、そういう定理を証明するためには「函数」の定義をはっきりさせなければならない。Dirichlet はそのためのひとつの提案をした訳である。「函数」の概念をどう捉えるかはどういう理論の中で使うかによって変えるべきだと思うが、フーリエ級数の理論においても Dirichlet 流の定義そのままではダメであることが今日ではわかっている。

3.2　写像の定義

Dirichlet 流の「函数」の定義における x と $f(x)$ の変域を実数の範囲から一般の集合におきかえたものを「写像」(map, mapping) という：

集合 A に属するすべての元 x に対して集合 B の元 $f(x)$ をそれぞれ指定するとき、この指定の仕方 f を集合 A から集合 B への**写像**と呼び、$f : A \to B$ と書く。

この写像の定義によれば、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像、あるいはもっと一般に、集合 A から $\mathbb{R}$ への写像のことを（Dirichlet の意味で）函数と言うわけである。

「指定の仕方」とは何か？　と思う人もあるだろう。集合の立場で「写像」を厳密に定義するには、例えば以下のようにすればよい：

$A \times B$ の部分集合 f で $\forall x\, [\exists y[(x,y) \in f] \wedge \forall z \forall w[((x,z) \in f \wedge (x,w) \in f) \Rightarrow z = w]$ が成り立つようなものを A から B への写像という。f が A から B への写像の時、A のどの元 x に対しても $(x,y) \in f$ となる y はちょうど 1 個あるのでこれを $f(x)$ と書く。

3.2.1　函数でない写像の例

ここでは

$$\mathbb{R}^2_{たて} := \{\ 2\,成分縦ベクトル全体\}$$

という記号を用いることにしよう。2 成分縦ベクトルを位置ベクトルだと思えば $\mathbb{R}^2_{たて}$ は座標平面上の点全体のなす集合と同一視される。写像 $f : \mathbb{R}^2_{たて} \to \mathbb{R}^2_{たて}$ を

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

によって定義すると

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3.1 \end{pmatrix}, \ldots$$

となる。勿論すべての実数 (x,y) の組み合わせについて調べるのは人間業ではないが、ともかく原理的には座標平面上の 1 点 1 点に対してそれぞれ座標平面上の行き先の点が決まっているので、f は写像である。

（以下の余白にこの写像の様子を書き込むこと。）

3.3 定義域・終域（行き先）

写像 $f : A \to B$ に対して A を f の**定義域** (domain) といい、B を終域 (codomain) あるいは行き先 (target) という。

言葉として「定義域」も domain も完全に定着しているが「終域」を使う人はほとんどいない。codomain もあまり使わない。target はよく使うがこれの和訳はまだ確定していないようだ。ここで言う target の意味で「値域 (range)」という人もいるが、次に述べる「像」と同じ意味で使うのが普通なので、やめた方がよい。

3.4 像（値域）

写像 $f : A \to B$ と A の部分集合 C に対して

$$f(C) := \{f(x)|x \in C\} = \{y|\exists x \in C[y = f(x)]\}$$

と定義し、$f(C)$ を「f による C の**像** (image)」という。また単に「f の**像**」と言えば $f(A)$ のことを指す。f の像のことを f の値域 (range) ということもある。

3.4.1 例

スライドのポジティブフィルムが与えられたとして、その上の点全体のなす集合を A とし、スクリーン上の点全体のなす集合を B として A の元 x に対して、光源と点 x を結ぶ直線とスクリーン B の交わる点を $f(x)$ とすれば写像 $f : A \to B$ が定まる。フィルム上の点全体のなす集合 A の任意の部分集合 C に対して像 $f(C)$ とは C に属する 1 点 1 点に対して光がその点を通ってスクリーンに当たる点を考えてその全体を集合と考えたものであって正に C の「像」である。

（以下の余白にこの写像の様子を書き込むこと。）

3.5 全射・単射・全単射

写像 $f : A \to B$ に対して

- f の像 $f(A)$ と行き先の集合 B とが一致するとき、すなわち $f(A) = B$ であるとき f は**全射** (surjection,onto-map,epimorphism) であるという。f が全射であるための必要十分条件は B のどの元 y に対しても $y = f(x)$ を満たす x が A の元として存在することである。

- f によって A の別の元は B の別の元に対応しているとき、すなわち

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

  が成り立つとき f は**単射** (injection,one-to-one map,monomorphism) であるという。

- 全射であって単射である写像のことを**全単射** (bijection,one-to-one map, isomorphism) という。

3.5.1 例

(1) $f(x) = x^2$ という２次関数を考えると、f は $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ という、実数全体の集合からそれ自身への写像と見なすことができる。この場合、定義域は $\mathbb{R}$ であり、値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合 $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = [0, \infty)$ である。

$f(1) = f(-1) = 1$ である。すなわち、異なる２つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

また、$f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$ なので、f を $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ という写像と見たときには全射ではない。しかし、f を $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ という写像と見ると全射になる。

(2) $f(x) = x^2$ という同じ２次関数を考える。しかし今度は、定義域を制限して、f を $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([0, \infty))$ はやはり $[0, \infty)$ となる。

この場合、f は $[0, \infty)$ 上では単調増加であり、$x_1 \neq x_2$ ならば必ず $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ となるので単射である。しかし全射ではないことは明らかである。

(3) しつこく $f(x) = x^2$ という同じ２次関数を考える。しかし今度は、定義域と値域を共に制限して、f を $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ という写像と考える。

(2) で述べた理由から f は単射であり、さらに、値域 $f([0, \infty))$ は $[0, \infty)$ であるので全射となり、全単射となる。

問題 3.1. 以下の (1)〜(9) の写像について、

(a) 単射であるが全射ではない。

(b) 全射であるが単射ではない。

(c) 単射でも全射でもない。

(d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。

(2) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。

(3) $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ と決める。

(4) $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ と決める。

(5) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \log x$ と決める。

(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

(7) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

(8) $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

(9) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

3.6 合成写像

２つの写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が与えられたとする。このとき、A から C への写像 $g \circ f$ を A の元 x に対して $g(f(x))$ をを対応させる写像として定義する。$g \circ f$ を f と g の **合成写像** と呼ぶ。

3.7 逆写像・恒等写像

命題 3.1. $f : A \to B$ が全単射であれば、B の任意の要素 b に対して、$f(a) = b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明： $f: A \to B$ は全射なので、$f(A) = B$ である。従って、B の任意の要素 b に対して、$b \in f(A) = \{\ f(a) \mid a \in A\ \}$ なので、ある $a \in A$ が存在して、$b = f(a)$ となっている。

f は単射なので、$f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとすると $a_1 = a_2$ でなければならない。すなわち、$f(a) = b$ となるような a はただ一つである。□

集合 A が与えられたとする。A のどの元 x に対しても x 自身を対応させる写像を A 上の**恒等写像** (identity map) といい id_A と書く。従って $\forall x \in A[\mathrm{id}_A(x) = x]$ が成り立つ。

$f: A \to B$ が全単射である時、$b \in B$ に対して、このような $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の **逆写像** といい、$f^{-1}: B \to A$ という記号で表す。すなわち、$f(a) = b$ の時、$f^{-1}(b) = a$ である。従って特に、

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

3.7.1 例

(1) $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ とすると f は全単射である。従って、f の逆写像 $f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \log x$ である。

(2) 上記の例であるように、$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を $f(x) = x^2$ とすると全単射となる。従って、この逆写像 $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。

(3) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ を $f(x) = \sin x$ とすると全単射である。従って、逆写像 $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ と書き、アークサイン x と読む。$\mathrm{Sin}^{-1} x$ あるいは Arcsin x と書くこともある。