2　集合

2.1　集合とは

集合とは何個かのもの（0個の場合も無限個の場合もある）を集めてひとつのものと考えたもののことである。例えば、「機械・社会環境系1年Aクラス」というものは物理的には存在しないが、このクラスに属する学生をすべて合わせてひとつのものと考えれば、それが「機械・社会環境系1年Aクラス」であると考えることが出来る。

2.2　元（要素）

x というものが A という集合に属することを

$$x \in A$$

と書いて、「x は A に属する」、「x は A の**元**（element）である」、「x は A の**要素**（element）である」などと読む。（$\in$ はギリシア文字の ϵ でローマ字の e にあたる文字である。）また、この否定、すなわち「x は A に属さない」、「x は A の**元**でない」、「x は A の**要素**でない」を

$$x \notin A$$

という記号で書く。

例えば

$$\text{池田君} \in \text{「機械・社会環境系 1 年 A クラス」}$$
$$\text{佐藤君} \notin \text{「機械・社会環境系 1 年 A クラス」}$$

という訳である。数学的には、集合とは、今考えている範囲で、どの x に対しても x がその集合に属するか属さないかがそれぞれどちらかにはっきり決まっているもののことである。

2.3　内包的表示と外延的表示

集合の表し方としては2通りの方法がある。

第1の方法は、その元を全て列挙するというものである。例えば、集合 A が $0, 2, 4$ という3つの元から成る集合であるとき、

$$A = \{0, 2, 4\}$$

と書く。このような書き表し方を哲学の用語を借りて**外延的（extensional）表示**という。この方法は大変分かりやすいが、元の個数が無限個だったり、有限個でも非常に多かったりすると実際に表すことは不可能であるという欠点がある。

第２の方法は、集合の元が満たすべき条件を指定する、というものである。（これをやはり哲学用語を借りて**内包的（intensional）表示**と言う。）上の例で言うと

$$A = \{\, 0 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の偶数の全体} \,\}$$

というのが同じ集合の内包的表示である。

例 2.1 (自然数全体)**.** 自然数 (natural numbers) 全体のなす集合を表すのに $\mathbb{N}$ という記号が良く使われる。即ち、

$$\mathbb{N} = \{\, \text{自然数全体} \,\} = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \}$$

である。$\{$ 自然数全体 $\}$ は内包的表示（「自然数」とは何かという問題はあるが）であり、$\{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \}$ は擬似外延的表示ということになるであろう。何故「擬似」かというと、この場合のように元の個数が無限個の場合、全ての元を列挙するのは不可能だからである。$\{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \}$ の「$\cdots$」の部分はごまかしであって、この書き方では 5 の次に何が来るかははっきりしない。

例 2.2 (標準的諸記号)**.** さまざまな範囲の数の集合を表す以下の記号も標準的なものである：

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \{\, \text{整数 (integers) 全体} \,\} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\, \text{有理数 (rational numbers) 全体} \,\} \\
\mathbb{R} &= \{\, \text{実数 (real numbers) 全体} \,\} \\
\mathbb{C} &= \{\, \text{複素数 (complex numbers) 全体} \,\}
\end{aligned}$$

($\mathbb{Z}$ はドイツ語の ganze Zahlen の Z であろう。$\mathbb{Q}$ は商の意味の quotiont からか？)

例 2.3 (空集合)**.** 元の個数が 0 個の集合を $\emptyset$ という記号で表し **空集合** (empty set) という。外延的表示で表せば $\emptyset = \{\}$ である。与えられた集合 A が空集合であるための必要十分条件は

$$\forall x \, [x \notin A]$$

であることである。

2.4　命題函数を用いた内包的表示

一般に、与えられた条件（命題函数）$P(x)$ が 真 となるような x 全体のなす集合

$$\{P(x) \text{ を満たす } x \text{ の全体} \,\}$$

を

$$\{\, x \,|\, P(x) \,\}$$

という記号で表す。($\{\, x \,;P(x) \,\}$ あるいは $\{\, x : P(x) \,\}$ と書く流儀もある。) 上の例で言うと

$$\{\, 0, 2, 4 \,\} = \{\, x \,|\, x \text{ は偶数} \wedge 0 \leq x \leq 5 \,\}$$

の左辺が外延的表示、右辺が内包的表示である。「x は偶数」という条件も数式化すると、

$$\{\, 0, 2, 4 \,\} = \{\, x \,|\, \exists n[n \in \mathbb{Z} \wedge x = 2n] \wedge 0 \leq x \leq 5 \,\}$$

となる。

論理のところで学んだように、$\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ などと書く時、厳密には x の変域を指定しておかないと $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ の意味が確定しないのであった。この事情は集合の内包的表示 $\{x|P(x)\}$ においても同じである。条件 $P(x)$ における x の変域を明記するために、x の変域が例えば集合 S の範囲であれば、これを

$$\{\, x \in S \,|\, P(x) \,\}$$

と書くことがある。「S の元であって条件 $P(x)$ を満たす x 全体のなす集合」である。

例 2.4. 正の実数全体のなす集合は、$\{\, x \,|\, x \in \mathbb{R}$ かつ $x > 0 \,\}$ あるいは $\{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \,\}$ と表される。文脈によって実数の範囲で考えていることがはっきりしている場合は $\{\, x \,|\, x > 0 \,\}$ と書いてもよい。

例 2.5. 今、暗黙の了解として整数の範囲で物事を考えているとすると、

$$\begin{aligned}
\{0 \text{ 以上の偶数全体}\,\} &= \{\, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots \,\} \quad \text{(擬似外延的表示)} \\
&= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ は偶数}\,\} \\
&= \{x \,|\, x \text{ は偶数} \wedge x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ は偶数} \wedge x > 0\} \\
&= \{\, x \,|\, \exists n[n \in \mathbb{Z} \wedge x = 2n] \wedge x > 0\} \\
&= \{\, x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists n[n \in \mathbb{Z} \wedge x = 2n] \wedge x > 0\} \\
&= \{\, x \,|\, \exists n[n \in \mathbb{N} \wedge x = 2n]\} = \{\, x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists n[n \in \mathbb{N} \wedge x = 2n]\} \\
&= \{\, 2n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, 2n \in \mathbb{Z} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}
\end{aligned}$$

となる。

例 2.5 の最後の行の $\{\, 2n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ あるいは $\{\, 2n \in \mathbb{Z} \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ という表現はいわば破格の用法であるがよく用いられる。前者は「$n \in \mathbb{N}$ という条件を満たす範囲を n が動くときの $2n$ という形の元全体のなす集合」であり、後者は「$n \in \mathbb{N}$ という

条件を満たす範囲を n が動くときの $2n$ という形で $\mathbb{Z}$ に属する元全体のなす集合」である。より一般化すれば、函数 $f(x)$ と条件 $P(x)$ に対して

$$\{f(x)|P(x)\}$$

は、「x が条件 $P(x)$ を満たす範囲を動くときの $f(x)$ 全体のなす集合」である。これは正式には

$$\{y|\exists x[(y = f(x)) \wedge P(x)]\}$$

と書かれるべきものである。

問題 2.1.

(1) 5 の倍数全体のなす集合を記号のみを用いた内包的表示で表せ。

(2) 4 で割ると余りが 3 となるような自然数全体のなす集合を記号のみを用いた内包的表示で表せ。

(3) $\{3k|k \in \mathbb{Z}\} \cap \{2k \in \mathbb{N}|k \in \mathbb{Z}\}$ を擬似外延的表示で表せ。また、なるべく簡単な内包的表示で表せ。

2.5　集合の包含関係と同等性

定義 2.1.

(1) 集合 B の全ての元が集合 A の元である時、

$$B \subseteq A$$

と書いて（$B \subseteqq A$ と書く人も $B \subset A$ と書く人もいる）、B は A の **部分集合** であるという。論理式を使って書けば

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x[x \in B \Rightarrow x \in A]$$

が成り立つ。

(2) $B \subseteq A$ かつ $A \subseteq B$ が成り立つ時、$A = B$ と定義する。

(3) $B \subset A$ であって $B \neq A$ のとき、B は A の **真部分集合** であると言う。$B \subseteq A$ と書いたときは、B が A の真部分集合かもしれないし、$B = A$ かもしれない。真部分集合であることをはっきり表したいときは、$B \subsetneqq A$ あるいは $B \subsetneq A$ などと書く。（真部分集合の意味で $B \subset A$ と書く人もいるがこれはやめた方がよい。）

例 2.6.

(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(2) $\{\, 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$

問題 2.2.

(1) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

(2) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

2.6　素朴な集合論に潜むパラドックス

さて、最初に述べたような素朴な集合の定義は、不正確かつ曖昧なもので、さらに悪いことに、重大な矛盾を含んでいることが知られている。 例えば

Russell の paradox : U を集合全体のなす集合とし、U の部分集合 W を次のように決める。

$$W = \{\, x \in U \mid x \notin x \,\}$$

こうすると、

$$W \in W \qquad \Leftrightarrow \qquad W \in \{\, x \in U \mid x \notin x \,\} \qquad \Leftrightarrow \qquad W \notin W$$

であり、

$$W \in W \qquad \Leftrightarrow \qquad W \notin W$$

という矛盾が成立してしまう。

矛盾を含む理論は、背理法を用いると全ての命題が真かつ偽となり、無意味なものとなってしまう。

このようなパラドックスは、いったいなぜ生じてしまったのだろうか？ 「集合全体のなす集合」というものを考えたために、このような事態に陥ったわけだが、そもそも「集合」というものは一体何なのか？ 実は我々は、集合というものを厳密に定義せずに、ただ単に「物の集まり」という曖昧な概念で済ませていたので

ある。集合を厳密に定義しなければ、数学的に正確な議論ができないことは、良く考えてみると、当然のことである。

20 世紀の一部の数学者の努力によって、現在では一応矛盾を含まないと思われる集合の定義が得られているがここでは述べない。(公理的集合論の本を参照のこと。)

2.7 集合算

定義 2.2.

(1) A, B を集合とする。

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \}$$

を A と B の **和集合** (union または sum) という。

(2)

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \}$$

を A と B の **共通部分** (intersection) という。

問題 2.3. A, B, C を集合とする。

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。

定義 2.3.

(1) 集合 A, B に対し**差集合** $A \setminus B$ を

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \}$$

で定義する。$A \setminus B$ は、$A - B$ と書くこともある。

(2) ある集合 X があって、全ての議論が X の中で行われる、ということを前提としているとき、X を **全体集合** という。

X が全体集合のとき、部分集合 $A \subseteq X$ に対して、$X \setminus A$ を A^c あるいは $\bar{A}$ と書き A の **補集合** (complement) という。

X を全体集合とするとき、以下の (1)〜(7) が成り立つ。(それぞれの場合について A, B, C は X の任意の部分集合とする。)

(1) 結合法則

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(2) 分配法則

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(3) 交換法則

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(4) 吸収法則

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(5) 空集合と全体集合の性質

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap X = A$

(6) 相補法則

$A \cup A^c = X$

$A \cap A^c = \emptyset$

(7) de Morgan の法則

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

問題 2.4. 上記を証明せよ。また、Venn 図を書いて納得せよ。

問題 2.5. 上記のうち (2)(3)(5)(6) のみを用いて他の (1)(4)(7) を証明せよ。

定義 2.4 (直積)**.**

(1) $a,\ b$ の**対** (あるいは**順序対**) を (a,b) で表す。$a=c$ かつ $b=d$ のとき $(a,b)=(c,d)$ であると決める。

(2) 集合 $A,\ B$ に対して、$a\in A, b\in B$ の対 (a,b) の全体からなる集合を $A\times B$ で表して、集合 $A,\ B$ の **直積集合** (direct product) という。記号で書けば

$$A\times B=\{\ (x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

である。

(3) 同様に、$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を集合とした時、

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\ (a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\quad(1\le i\le n)\ \}$$

を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の直積集合という。

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合、$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であった。n 個の $\mathbb{R}$ の直積集合を $\mathbb{R}^n$, n 個の $\mathbb{C}$ の直積集合を $\mathbb{C}^n$ と書く。

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ なので、２つの実数 x, y のペア (x,y) 全体の集まりである。(x,y) は平面上の点と見なすことができるので、$\mathbb{R}^2$ は平面上の点全体の集合と見なすことができ、２次元平面と同一視することができる。同様に、$\mathbb{R}^3$ は３次元空間と見なすことができる。