

講義では「フーリエの方法」を波動方程式の初期値境界値問題に適用したので、今回はもともと Fourier がやったように熱方程式の初期値境界値問題に適用してみよう。熱方程式とは

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

の形の定数係数2階線型偏微分方程式で、波動方程式もまたそうであったように、必ずしも特定の物理的モデルを記述するものではなく、拡散現象一般を記述する数学的モデルであるが、例えば x 軸が針金か何かで $u(x, t)$ は点 x の時刻 t における温度と考えればよい。

針金の長さが L で両端の温度が常に 0 度に保たれるとすれば、境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2)$$

を満たすことが要請される。(この型の境界条件を Dirichlet 条件と言う。)

この針金の時刻 $t = 0$ の時の温度分布が $\varphi(x)$ (即ち各点 x の温度が $\varphi(x)$) であるとして時刻 t における点 x の温度 $u(x, t)$ は熱方程式 (1) と境界条件 (2) の上に初期条件

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

を満たす解を求めれば理論的に予測することが出来る訳である。

波動方程式の場合同様、ひとまず初期条件 (3) は忘れて熱方程式 (1) と境界条件 (2) だけを満たすものをすべて求めることを目標にする。そのためにまず、変数分離形と呼ばれる特別な形

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

即ち (t によらず) x だけに依存する函数と (x によらず) t だけに依存する函数の積の形で熱方程式 (1) と境界条件 (2) を満たすものを求めよう。(そのような解が存在するかどうかは求めてみないと分からないが。)

問題 1. (4) を熱方程式 (1) に代入して (x だけの函数) = (t だけの函数) の形に変形せよ。

問題 2. 問題 1 で求めた式の両辺が x, t の 2 変数函数として定数函数である理由を述べよ。また、この定数を k とおいて $X(x), T(t)$ それぞれが満たす微分方程式を求めよ。

問題 3. (4) を境界条件 (2) に代入して $X(x)$ に関する条件を求めよ。ただし、 $T(t)$ は恒等的に 0 ではないと仮定する。

問題 4. 問題 2 で求めた $X(x)$ に関する微分方程式の解をすべて求めよ。

問題 5. 問題 4 で求めた解が問題 3 で求めた $X(x)$ に関する条件を満たすために定数 k の満たすべき条件を求めよ。

問題 6. 問題 5 の結果を用いて (4) の形の函数 $u(x, t)$ で熱方程式 (1) と境界条件 (2) とを同時に満たすものをすべて求めよ。(ただし $u(x, t) \equiv 0$ を除く。) また、それらの解の物理的解釈を述べよ。

さて熱方程式 (1) と境界条件 (2) を満たす函数のうち変数分離形のものがすべて求まった。重ね合わせの原理によりこれらの重ね合わせ (それぞれを定数倍して足したもの) もまた熱方程式 (1) と境界条件 (2) の解であるが、逆に熱方程式 (1) と境界条件 (2) のすべての解はこの方法で得られることが知られている。

問題 7. 問題 6 で求めた解達の重ね合わせ（それぞれを定数倍して足したもの）もまた熱方程式 (1) と境界条件 (2) の解である。これが初期条件 (3) を満たすと仮定して、重ね合わせの係数を $\varphi(x)$ から求める公式を導け。

問題 8. 初期条件を

$$\varphi(x) = \frac{L}{2} - \left| x - \frac{L}{2} \right| \quad (5)$$

として問題 7 で求めた公式に当てはめて初期値境界値問題 (1)(2)(3) の解を無限和の形で求めよ。