

工業数学 II 冬休みレポートに関する助言

- 「有理関数だから連続」など書いている人がいましたが、これは言い過ぎです。「有理関数は極を除き連続」なら正しい。
- 「有理関数」とは $\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ のことなので、どの変数の多項式かを特定しないと意味がはっきりしません。今の場合、単に「有理関数」といえば z の有理関数を意味します。 x, y の有理関数ならばその旨をはっきり書かねばなりません。
- 与えられた関数 $F(x, y)$ が点 (a, b) において「 x, y の二変数関数として微分可能」であることの定義は「定数 A, B が存在して

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{F(a+h, b+k) - (F(a, b) + Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

であること」ですが、これでは実際に検証するのが面倒なので、 xy 平面上の領域 D において定義された二変数関数 $F(x, y)$ に対して

$$\text{偏導関数 } \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \text{ が存在して } D \text{ で連続} \Rightarrow x, y \text{ の二変数関数として } D \text{ の各点で微分可能} \Rightarrow \text{偏導関数 } \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \text{ が存在}$$

は証明なしに用いて構いません。(なお、一般に逆向きの矢印は成り立ちません。) 微分可能であることを示すには偏微分を求めて連続であることを言えばよいし、微分可能でないことを示すには偏微分可能でないことを言えば OK な訳です。

- 「複素微分可能」と「 x, y の二変数関数として微分可能」を混同している人が沢山いましたので注意して下さい。1 点でなく領域 D で考えれば「領域 D の各点で複素微分可能」と「領域 D で正則」とは同等です。
- 講義で

$$f(z) \text{ が領域 } D \text{ で正則かつ } f'(z) \neq 0 \Rightarrow f \text{ は } D \text{ で等角写像}$$

ということを述べましたのでこれは証明なしに用いて構いません。ただし逆は成り立ちません。等角写像の定義は

$$\text{各点 } (a, b) \text{ についてこの点で交わる微分可能な任意の 2 曲線 (の接線) が } (a, b) \text{ においてなす角と、この 2 曲線の } f \text{ による像が } f(a, b) \text{ においてなす角が等しいこと}$$

ですが、これを直接検証するのは面倒なので、これと同等な

$$\text{写像 } f \text{ の点 } (a, b) \text{ における線型近似 } \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \text{ が相似変換になっていること}$$

即ち

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ または } r \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ となる } r \neq 0 \text{ と } \theta \text{ がある}$$

言い換えると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \neq O \text{ かつ } \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = 0$$

または

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \neq O \text{ かつ } \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = 0$$

であることを定義と考えましょう。これなら、計算で検証できます。