

工業数学 II 「留数計算」レポートに関する助言

- 以下は皆さんの理解を深めるための解説である。以下に書いてあることの全部または一部を内容を理解しないままレポートに書き写した場合は不合格とする。内容をよく理解して自分の言葉で書くように。
- 有理関数について言えば、極とは分母が 0 になる点のことです。(ただし有理関数の分母と分子は共通因数を持たないとする。)
- $z = a$ を $f(z)$ の極とすれば

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot g(z), \quad g(z) \text{ は } z = a \text{ で正則}$$

の形に出来る。(分母から $z-a$ をくり出せるだけくり出せばよろしい。) $g(z)$ を $z = a$ でテイラー展開

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

すれば Laurent 展開

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z-a} + a_n + a_{n+1}(z-a) + a_{n+2}(z-a)^2 + \cdots$$

を得る。Laurent 展開の (-1) 次の係数(上の場合で言うと a_{n-1}) を留数という。

- 有理関数 $f(z)$ に対し留数定理を用いて実積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めるには、まず、大きい正の定数 R に対して、実軸上をまず $z = -R$ から $z = R$ まで進み次に原点中心半径 R の円の上を点 $z = R$ から反時計回りにまわって $z = -R$ に戻る積分路を考える。これから $R \rightarrow \infty$ の極限を考えるのであるが、 R がある程度以上大きいとき上半平面にあるすべての極が積分路に囲まれるので留数定理によりこの積分の値は上半平面にある極の留数の和の $2\pi\sqrt{-1}$ 倍になる。
- $R \rightarrow \infty$ のとき上の積分のうち半円の積分が 0 に収束することを示せばおわりです。ここの証明が正しく出来ていないと積分値だけ正しくても合格にはなりません。以下、証明のヒントを書きます。
- 線積分の定義。積分路 C のパラメタ表示を $z = \varphi(t), a \leq t \leq b$ とすれば

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

である。函数値が複素数でも特に気にすることはないが気になる人は実部と虚部に分けて考えれば高校の時にやった積分と変わらない。

- $a < b$ のとき

$$\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|dt$$

であることは高校生でも知っている。積分を $F(t)$ が正の部分と負の部分に分けてみればすぐ分かることである。この式は実は $F(t)$ が複素数値(t は複素変数ではなく実変数である。念のため。)の時も成り立つ。このことは証明なしに用いてよろしい。

- 半円の積分路のパラメタ表示を $z = \varphi(t)$ とすれば、有理関数 $f(z)$ に対して $|f(\varphi(t))\varphi'(t)|$ が t を含まない R で評価できればよろしい。つまり

$$|f(\varphi(t))\varphi'(t)| \leq c(R), \quad c(R) \text{ は } t \text{ に依存しない } R \text{ だけの式}$$

とすれば

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq c(R) \cdot (b-a)$$

となる。(何故こうなるか自分で考えるように。材料は全部揃っている。) $c(R) \rightarrow \infty$ を示せばおわりである。