宿題「集合」に関するコメント

1. 集合の元と部分集合の区別
   例えば $A = \{0, 1, 2\}$ の時、
   $$0 \in A \text{ かつ } 1 \in A \text{ かつ } 2 \in A$$
   即ち 0 も 1 も 2 も A の元だが、
   $$0 \not\subseteq A \text{ かつ } 1 \not\subseteq A \text{ かつ } 2 \not\subseteq A$$
   即ち 0 も 1 も 2 も A の部分集合ではない。そもそも 0 も 1 も 2 も集合ではない。(すべての数学を集合論に立脚して考える立場もあり、この立場からは 0 も 1 も 2 も集合として構成されるのだが、ここではその立場は取らない。）一方
   $$\{0\} \subseteq A \text{ かつ } \{1\} \subseteq A \text{ かつ } \{2\} \subseteq A$$
   $\{0\}$ は 0 のみを元とする 1 個の元からなる集合であって $0 \in \{0\} \neq 0$ である。(なお A の部分集合が上記の 3 個しかない、などとは主張していないので注意すること。)
   　上記は 1 個の元の場合であったが、2 個以上の元の場合も、単に列挙しただけでは集合とは見なせない。例えば $C = 0, 1$ などと書いても「$C = 0$ または $C = 1$」という意味にしかならないので $C \not\subseteq A$ である。
2. 言葉に惑わされない
   一般に、与えられた集合 X, Y に対して、$X \subseteq Y$ 即ち「X が Y の部分集合である」とは
   $$\forall x[x \in X \Rightarrow x \in Y]$$
   が成り立つことを言う。言い換えれば X の元であって Y の元でないようなものがひとつもない状態である。概念には名前が無いと不便なので一応「部分集合」という名前がついているが、そこから想像される通りの意味では必ずしもないので注意が必要である。
   「なんだつまり X が Y に含まれるってことか」などと思うのも危険である。「含まれる」という言葉に引きずられてしまうからである。
   別の話題だが、「直積集合」と言い $A \times B$ というような記号であるので、きっと A の元と B の元を掛け算するのだろう、と思う人もあるようだ。そういう想像を

するのはいいとしてもそのまま信じ込んではいけない。定義をよく読んで考えること。

3. 空集合について

   空集合の記号については教科書をよく読むこと。自己流でやると失敗する。

4. (,) と $\{\cdots\}$

   順序対 (,) と集合 $\{\cdots\}$ とは名前も違うし記号も違うくらいであるから概念としても違うものであり、混同してはならない。

$$
\begin{aligned}
\{0,1\} = \{1,0\} \text{ だが } (0,1) \neq (1,0) \\
\{1,1\} = \{1\} \text{ だが } (1,1) \neq (1)
\end{aligned}
$$

   である。

5. 内包的表示と外延的表示

   内包的表示と外延的表示とを混同している人がかなりいた。意味をよく知らない言葉はちゃんと調べてから（今の場合は教科書をみればよろしい）問題に取り組むのが当然であろう。

   集合の外延的表示は、その集合に属する元をすべて列挙し、元と元の間すべてにカンマを入れ、最初と最後に「{」と「}」を書くのが約束である。例えば、カンマを入れずに $\{a\,b\}$ と書くと、通常 a と b の積 ab のみを元として含む集合を意味してしまう。何も言わずに $0,1,2$ などと列挙しても「3個の元 $0,1,2$ からなる集合」の意味にはならない。$\{0,1,2\}$ と書いて初めてそういう意味になる。

   $A \times B = \{(x,y)|x \in A \text{ かつ } y \in B\}$ を書いて答としている人が何人もいたが、これは単に直積集合の一般的定義を書いたに過ぎず、A や B が具体的に与えられている時にこれだけ書いても何もやったことにならない。また、これは集合 $A \times B$ の内包的表示であるので、「外延的表示で表せ」という問題の要求に応えていない。

   $\{(x,y)|x \in A \text{ かつ } y \in B\}$ の x, y は、「束縛変数」あるいはプログラミングの用語で言えば「局所変数」であって、この表現の「外」から見れば存在しないのと同じである。例えば $\{x \in \mathbb{Z}|0 \leq x \leq 2\}$ の実態は $\{0,1,2\}$ であって x はどこにもなく、「$x=1$ のときの $\{x \in \mathbb{Z}|0 \leq x \leq 2\}$」というのは「$x=1$ のときの $\{0,1,2\}$」と言っているのと同じなので、「$x=1$」という表現の中の x と「$\{x \in \mathbb{Z}|0 \leq x \leq 2\}$」という表現の中の x とは無関係なものと解釈される。ましてや x に 1 を代入してしまった「$\{1 \in \mathbb{Z}|0 \leq 1 \leq 2\}$」などは意味をなさない。1 のみを元とする集合を書きたければ $\{1\}$ と書けばすむことである。勿論 $\{x \in \mathbb{Z}|0 \leq x \leq 2\} \neq \{0\},\{1\},\{2\}$ である。

6. 不等式の表す領域

①または②に誤りがある場合③④は採点していませんので、「可」の答案は御自分でよく確かめてから再提出して下さい。不等式の表す領域の求め方については教科書の p.97 以降を参照。（ただし今回の課題の模範解答を書いてあるのではないので、形だけまねしても解答にはならない。内容を理解して自分の言葉で書くこと。）